

Типовой расчёт по линейной алгебре – 2 семестр, заоч. отд.

(примеры решения некоторых задач)

2. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду

Кривая второго порядка – это кривая, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Если последнее условие соблюдается, имеем невырожденные кривые второго порядка – эллипс, гиперболу и параболу.

Простейший (или канонический) вид указанных кривых, т.е. такой, когда их центр совпадает с началом системы координат (не смещён вправо, вверх и т.д.), а сама кривая не повернута относительно него, следующий:

$$\text{Эллипс: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Гипербола: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Парабола: } y^2 = 2px.$$

Понятно, что кривые второго порядка наиболее легко исследовать в их простейшем (каноническом) виде, когда, в частности, становится ясным вид кривой (это эллипс или, к примеру, гипербола) и другие показатели, поэтому возникает задача приведения уравнения кривой второго порядка из общего вида в канонический.

1. Параллельный перенос кривой второго порядка

Иногда начало координат смещается без поворота, к примеру, на c единиц по оси X и d единиц по оси Y . Тогда связь между старыми координатами $(x; y)$ и новыми координатами $(x_1; y_1)$ задаётся формулами:

$$\begin{cases} x = x_1 + c \\ y = y_1 + d \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = x - c \\ y_1 = y - d \end{cases}$$

К примеру, если новое начало координат было смещено на 1 по оси OX и на 2 по оси OY ($c = 1$; $d = 2$), то для эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в исходной системе координат, его уравнение в новой системе станет $\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1$.

Если имел место только параллельный перенос канонического вида кривой второго порядка, то достаточно представить имеющуюся формулу кривой в каноническом виде с учётом указанных формул перехода к новой системе координат.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $7x^2 + 4y^2 - 28x + 8y + 4 = 0$, определить вид соответствующей кривой.

Преобразуем уравнение

$$7x^2 - 28x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$$

$$7(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 + 2y + 1 - 1) + 4 = 0$$

$$7(x^2 - 4x + 4) - 28 + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 + 4 = 0$$

$$7(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 28 \quad \frac{7(x-2)^2 + 4(y+1)^2}{28} = 1$$

$$\frac{7(x-2)^2}{28} + \frac{4(y+1)^2}{28} = 1 \quad \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$$

Отсюда видно, что исходная кривая задаёт эллипс.

1.2. Поворот осей координат

При повороте осей координат на угол α против часовой стрелки начало координат не меняется, а связь между старыми координатами $(x; y)$ и новыми координатами $(x_1; y_1)$ задаётся формулами:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y_1 = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Эти формулы используются при приведении уравнения кривой второго порядка к каноническому виду в более общем случае (при наличии поворота).

Пример. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$, определить её вид.

Наличие поворота кривой относительно её центра симметрии отражается наличием в формуле кривой ненулевого множителя при члене xy . Поэтому сначала найдём угол α , на который необходимо повернуть исходную кривую, чтобы множитель при члене xy стал равным 0, а затем уже известным нам способом избавимся от множителей при x и y .

Произведём замены при повороте на угол α по формулам

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases}$$

$$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$$

$$14(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)^2 + 24(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) + 21(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)^2 - 4(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) + 18(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) - 139 = 0$$

$$\begin{aligned} & (14 \cos^2 \alpha + 24 \cos \alpha \sin \alpha + 21 \sin^2 \alpha)x_1^2 + \\ & + (-28 \cos \alpha \sin \alpha + 24 \cos^2 \alpha - 24 \sin^2 \alpha + 42 \cos \alpha \sin \alpha)x_1 y_1 + \\ & + (14 \sin^2 \alpha - 24 \cos \alpha \sin \alpha + 21 \cos^2 \alpha)y_1^2 + \\ & + (-4 \cos \alpha + 18 \sin \alpha)x_1 + (4 \sin \alpha + 18 \cos \alpha)y_1 = 139 \end{aligned}$$

Множитель при $x_1 y_1$ приравняем нулю:

$$-28 \cos \alpha \sin \alpha + 24 \cos^2 \alpha - 24 \sin^2 \alpha + 42 \cos \alpha \sin \alpha = 0$$

$$24 \cos^2 \alpha + 14 \cos \alpha \sin \alpha - 24 \sin^2 \alpha = 0$$

$$12 \cos^2 \alpha + 7 \cos \alpha \sin \alpha - 12 \sin^2 \alpha = 0$$

Если $\cos^2 \alpha = 0$, то из полученного уравнения $\sin^2 \alpha = 0$, что противоречит тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Поэтому $\cos^2 \alpha \neq 0$ и можно поделить обе части уравнения на $\cos^2 \alpha$:

$$12 \operatorname{tg}^2 \alpha - 7 \operatorname{tg} \alpha - 12 = 0. \quad \text{Отсюда } \operatorname{tg} \alpha = -3/4; \quad \operatorname{tg} \alpha = 4/3.$$

Пусть $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$. Тогда $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 1/\sqrt{1 + (4/3)^2} = 3/5$, а

$\sin \alpha = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = 3/5 \cdot 4/3 = 4/5$. Тогда

$$\begin{aligned} & (14\cos^2 \alpha + 24\cos \alpha \sin \alpha + (14+7)\sin^2 \alpha)x_1^2 + \\ & + (14\sin^2 \alpha - 24\cos \alpha \sin \alpha + (14+7)\cos^2 \alpha)y_1^2 + \\ & + (-4\cos \alpha + 18\sin \alpha)x_1 + (4\sin \alpha + 18\cos \alpha)y_1 - 139 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (14 + 24\cos \alpha \sin \alpha + 7\sin^2 \alpha)x_1^2 + \\ & + (14 - 24\cos \alpha \sin \alpha + 7\cos^2 \alpha)y_1^2 + \\ & + (-4\cos \alpha + 18\sin \alpha)x_1 + (4\sin \alpha + 18\cos \alpha)y_1 - 139 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (14 + 24 \cdot 3/5 \cdot 4/5 + 7 \cdot (4/5)^2)x_1^2 + \\ & + (14 - 24 \cdot 3/5 \cdot 4/5 + 7 \cdot (3/5)^2)y_1^2 + \\ & + (-4 \cdot 3/5 + 18 \cdot 4/5)x_1 + (4 \cdot 4/5 + 18 \cdot 3/5)y_1 - 139 = 0 \end{aligned}$$

$$30x_1^2 + 5y_1^2 + 12x_1 + 14y_1 - 139 = 0$$

Выделим из каждой переменной полный квадрат

$$30(x_1^2 + \frac{2}{5}x_1) + 5(y_1^2 + \frac{14}{5}y_1) - 139 = 0$$

$$30(x_1^2 + 2\frac{1}{5}x_1 + (\frac{1}{5})^2 - (\frac{1}{5})^2) + 5(y_1^2 + 2\frac{7}{5}y_1 + (\frac{7}{5})^2 - (\frac{7}{5})^2) - 139 = 0$$

$$30(x_1 + (\frac{1}{5}))^2 - 30(\frac{1}{5})^2 + 5(y_1 + (\frac{7}{5}))^2 - 5(\frac{7}{5})^2 - 139 = 0$$

$$30(x_1 + 0.2)^2 - \frac{6}{5} + 5(y_1 + 1.4)^2 - \frac{49}{5} - 139 = 0$$

$$30(x_1 + 0.2)^2 + 5(y_1 + 1.4)^2 = 150$$

$$\frac{(x_1 + 0.2)^2}{5} + \frac{(y_1 + 1.4)^2}{30} = 1$$

Если ввести обозначения $x_2 = x_1 + 0.2$; $y_2 = y_1 + 1.4$, то

$$\frac{(x_2)^2}{5} + \frac{(y_2)^2}{30} = 1 \text{ — каноническое уравнение эллипса.}$$

1.3. Приведение к каноническому виду через квадратичную форму

Уравнение кривой второго порядка можно привести к каноническому виду и на основе её квадратичной формы, т.е. членов, степень которых равна двум.

Для упомянутого выше уравнения $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$, квадратичной формой является $14x^2 + 24xy + 21y^2 = 0$ (т.е. мы сосредотачиваем внимание сначала только на повороте координат).

Для квадратичной формы составляем матрицу характеристических чисел (см. [1]), решением которой являются множители a и b канонического уравнения, соответствующего исходной кривой:

$$\begin{vmatrix} 14 - \lambda & 12 \\ 12 & 21 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$14 \cdot 21 - (14 + 21)\lambda + \lambda^2 - 144 = 0$$

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0$$

Откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 150}}{2} = \frac{35 \pm 25}{2} = 5; 30.$$

Следовательно, каноническое уравнение, соответствующее исходному, будет

$$\frac{(x_2)^2}{5} + \frac{(y_2)^2}{30} = 1.$$

При необходимости величину угла поворота и смещение начала координат можно вычислить дополнительно [1].

Ссылки

1. *Ефимов Н.В.* Квадратичные формы. М.: Наука, 1967.