Типовой расчёт по линейной алгебре

(*примеры решения некоторых задач*)

3. Решить методами Крамера, Жордана-Гаусса и
   матричным методом следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1z = 1 \\ 4x + 3y - 3z = 3 \\ 1x + 7y - 4z = 3 \end{cases}$$

3.1. Метод Крамера

Напомним, что в этом способе определяются главный и побочные определители матрицы, а значения неизвестных вычисляются как отношение соответствующего побочного определителя к главному (когда последний $\neq 0$).

Вычислим главный определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &= 2\cdot 3\cdot(-4) + 1\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 4\cdot 7 - \\ &\quad -1\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-3)\cdot(-4) - 2\cdot(-3)\cdot 7 = \\ &= -24 + 9 + 28 - 3 - 48 + 42 = 79 - 75 = 4 \end{aligned}$$

Найдём побочные определители (их 3, по числу неизвестных)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &= 1\cdot 3\cdot(-4) + 3\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 3\cdot 7 - \\ &\quad -1\cdot 3\cdot 3 - 4\cdot(-3)\cdot 3 - 1\cdot(-3)\cdot 7 = \\ &= -12 + 27 + 21 - 9 - 36 + 21 = 69 - 57 = 12 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &= 2\cdot 3\cdot(-4) + 1\cdot 1\cdot(-3) + 1\cdot 4\cdot 3 - \\ &\quad -1\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-4)\cdot 1 - 3\cdot(-3)\cdot 2 = \\ &= -24 - 3 + 12 - 3 + 16 + 18 = 46 - 30 = 16 \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &= 2\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot(-3) + 1\cdot 4\cdot 7 - \\ &\quad -1\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-3)\cdot 3 - 2\cdot 3\cdot 7 = \\ &= 18 - 9 + 28 - 3 + 36 - 42 = 82 - 54 = 28 \end{aligned}$$

Найдём неизвестные по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{16}{4} = 4; \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{28}{4} = 7.$$

Проверим наше решение, подставив его в исходную систему:

$$\begin{Bmatrix} 2x - 3y + 1z = 1 \\ 4x + 3y - 3z = 3 \\ 1x + 7y - 4z = 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\cdot 3 - 3\cdot 4 + 1\cdot 7 = 1 \\ 4\cdot 3 + 3\cdot 4 - 3\cdot 7 = 3 \\ 1\cdot 3 + 7\cdot 4 - 4\cdot 7 = 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 13 - 12 = 1 \\ 24 - 21 = 3 \\ 31 - 28 = 3 \end{Bmatrix}$$

Верно.

3.2. Метод Гаусса

Приведём исходную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 7 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 7 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 5 & -2 \\ 0 & 43 & -23 & 11 \\ 0 & 17 & -9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 5 & -2 \\ 0 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & 17 & -9 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -10 & 5 & -2 \\ 0 & 9 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -10 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -10 & 0 & -37 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{Отсюда} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 7 \end{cases}$$

Проверка решения см. выше.

3.3. Матричный метод

Здесь система уравнений и её решение записывается в матричном виде:
Сама система $A \cdot x = B$; В нашем случае

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение системы записывается как
$X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} – матрица, обратная к A.
Сначала вычислим определитель матрицы A и проверим его на неравенство 0.
$|A| = 4 \neq 0$ (см. п. 3.1).

Для вычисления A^{-1} далее вычислим *матрицу миноров* матрицы A:

$$\begin{vmatrix} (3\cdot(-4)-(-3)\cdot 7) & (4(-4)+3\cdot 1) & (4\cdot 7-3\cdot 1) \\ (3\cdot 4-1\cdot 7) & (2(-4)-1\cdot 1) & (2\cdot 7-(-3)\cdot 1) \\ (3\cdot 3-1\cdot 3) & (2(-3)-1\cdot 4) & (2\cdot 3-4(-3)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -13 & 25 \\ 5 & -9 & 17 \\ 6 & -10 & 18 \end{vmatrix}$$

По матрице миноров вычисляется *союзная матрица* A^*, состоящая из миноров с соответствующим знаком ($(-1)^{i+j}$) и сама матрица A^{-1}:

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 25 \\ -5 & -9 & -17 \\ 6 & 10 & 18 \end{pmatrix}; \ (A^*)^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 6 \\ 13 & -9 & 10 \\ 25 & -17 & 18 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot(A^*)^T = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -5 & 6 \\ 13 & -9 & 10 \\ 25 & -17 & 18 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 9 & -5 & 6 \\ 13 & -9 & 10 \\ 25 & -17 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 9\cdot 1 - 5\cdot 3 + 6\cdot 3 \\ 13\cdot 1 - 9\cdot 3 + 10\cdot 3 \\ 25\cdot 1 - 17\cdot 3 + 18\cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$