Типовой расчёт по линейной алгебре

(*примеры решения некоторых задач*)

№ 2. Даны вершины пирамиды $A_1(4,4,4),\ A_2(12,0,4),\ A_3(4,0,8),\ A_4(12,6,12)$.

Составить: уравнение ребра $A_1 A_4$; уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; уравнение высоты пирамиды, проведённой из вершины A_4; найти координаты точки O, где O – точка плоскости $A_1A_2A_3$, в которую проектируется вершина A_4.

Уравнения рёбер (точнее, соотв. им векторов) находим по формуле:

$$x_{14} = x_4 - x_1 = 12-4 = 8; \quad y_{14} = y_4 - y_1 = 6-4 = 2; \quad z_{14} = z_4 - z_1 = 12-4 = 8;$$

Уравнение плоскости по трём точкам.

Для общего случая (когда точки не лежат на одной прямой), плоскость задаётся уравнением $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$	Подставляя данные нашей задачи, получаем $\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-4 \\ 12-4 & 0-4 & 4-4 \\ 4-4 & 0-4 & 8-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-4 \\ 8 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Отсюда, по правилам вычисления определителя, находим

$$(x-4)\cdot(-1)^{(1+1)}\cdot((-4)\cdot 4-0)+$$
$$+(y-4)\cdot(-1)^{(1+2)}\cdot(8\cdot 4-0)+$$
$$+(z-4)\cdot(-1)^{(1+3)}\cdot(8\cdot(-4)-0)=0$$
$$(x-4)\cdot(-16)+(y-4)\cdot(-32)+(z-4)\cdot(-32)=0$$
$$-16x+64-32y+128-32z+128=0$$
$$-x+4-2y+8-2z+8=0$$

$-x-2y-2z+20=0$ или $x+2y+2z-20=0.$

Уравнение высоты пирамиды, проведённой из вершины $A_4(12,6,12)$

Указанная высота, очевидно, принадлежит прямой, проходящей через точку A_4 и перпендикулярной плоскости $A_1A_2A_3$. Если плоскость, проходящую через точки $A_1A_2A_3$ обозначить в общем случае как $Ax+By+Cz+D=0$, то перпендикулярный к ней направляющий вектор будет равен (A, B, C), а искомая прямая представляться следующими уравнениями:

$\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$, где (x_0, y_0, z_0) – координаты точки, из которой опускается высота на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

Используя уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, полученное в предыдущем пункте, имеем

$$\frac{x-12}{-1}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-12}{-2}$$

Координаты точки O, где O – точка плоскости $A_1A_2A_3$, в которую проектируется вершина A_4 можно найти, решив систему уравнений, состоящую из уравнения плоскости $A_1A_2A_3$ и уравнения высоты пирамиды к этой плоскости:

$$\begin{cases} x+2y+2z=20 \\ \dfrac{x-12}{1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-12}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-18 \\ z=2x-12 \\ x+4x-36+4x-24=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=80/9 \\ y=-2/9 \\ z=52/9 \end{cases}$$