1. Даны три вершины треугольника ABC: A (6; 0), B(8; 10), C(14; 8).

Найти уравнение и длину проведённой из вершины B:

а) медианы; б) высоты.

1.1. Уравнение и длина медианы, проведённой из вершины B

Напомним, что медиана, проведённая из вершины B, делит противоположную сторону AC треугольника (к примеру, точкой M) на две равные части. Это значит, что и проекции точки M на оси OX и OY будут соответственно вычисляться как

$$M_x = \frac{C_x + A_x}{2} = \frac{14+6}{2} = 10. \quad M_y = \frac{C_y + A_y}{2} = \frac{8+0}{2} = 4.$$

Отсюда вектор $BM = \{M_x - B_x; M_y - B_y\} = \{10-8; 4-10\} = \{2; -6\}$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки, записывается как

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Значит, уравнение медианы у нас запишется как

$$\frac{x-B_x}{M_x-B_x} = \frac{y-B_y}{M_y-B_y} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{10-8} = \frac{y-10}{4-10}.$$

То есть $6(x-8) = 2(y-10)$ или $3x - y - 38 = 0$.

Длина медианы $|BM| = \sqrt{(B_x - M_x)^2 + (B_y - M_y)^2} = \sqrt{(8-10)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{40}$

1.2. Уравнение и длина высоты, проведённой из вершины B

Высота треугольника ABC, проведённая из точки B, опускается на сторону AC под прямым углом. Поэтому решение может состоять в том, что мы определяем уравнение проходящей через точки A и C прямой, затем – уравнение нормали (перпендикуляра) к AC, проводим её через точку B и определяем точку H пересечения высоты и отрезка AC, откуда найдём остальные искомые данные.

Уравнение высоты, проходящей через вершину B:

$$\frac{x-B_x}{C_y-A_y} = \frac{y-B_y}{A_x-C_x} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{8-0} = \frac{y-10}{6-14} \quad \text{или} \quad \frac{x-8}{8} = \frac{y-10}{-8} \quad \text{или}$$

$y-10 = 8-x$ или $y = 18-x$.

Длина высоты $|BH| = \frac{2S}{|AC|}$, где S – площадь треугольника ABC.

$$S = \frac{1}{2} |(B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)| = \frac{1}{2} |(8-6)(8-0) - (14-6)(10-0)| = \\ = \frac{1}{2} |2 \cdot 8 - 8 \cdot 10| = \frac{1}{2} |64| = 32.$$

$$|AC| = \sqrt{(A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2} = \sqrt{(6-14)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{2 \cdot 64} = 8\sqrt{2}.$$

Длина высоты из точки B

$$|BH| = \frac{2S}{|AC|} = \frac{2 \cdot 32}{8\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$