Линейная алгебра. Матрицы

(*вводные определения и примеры*)

Предуведомление: ниже – лишь краткий конспект,
не предназначенный для замены имеющихся учебных пособий.

Шаги решения задачи с использованием математики:

1. **Постановка задачи** (цель исследования, критерии её достижения или приближения к ней, существенные стороны, подлежащие исследованию);
2. **Выбор образа (модели)**, более удобно отражающую выбранные для изучения параметры и их связь между собой.
3. **Выбор алгоритма**, решающего данную задачу на основе и **в понятиях** ранее выбранной **модели**.
4. **Программирование, тестирование, документация**.
5. **Расчёты**.
6. Оформление, **сопровождение**.

Матрица – одна из известных **моделей (образов) постановки и решения задач** с использованием математики.

Матрица: таблица, заполненная постоянными (числовыми, буквенными…) или переменными (неизвестные, параметры…) величинами.

К примеру, матрица – это один из приёмов более кратко записать, систему уравнений (СУ).

Так, СУ $\begin{cases} \mathbf{2}x - \mathbf{3}y + \mathbf{1}z = \mathbf{1} \\ \mathbf{4}x + \mathbf{3}y - \mathbf{3}z = \mathbf{3} \\ \mathbf{1}x + \mathbf{7}y - \mathbf{4}z = \mathbf{3} \end{cases}$ соответствует матрица $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -\mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & -\mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$.

1. Сложение и умножение матриц

Две матрицы подходящей друг для друга размерности **можно складывать и умножать** между собой.

Для ***сложения двух матриц*** $A_{[M\times N]}$ и $B_{[M\times N]}$ требуется, чтобы **их размерности совпадали** (т.е. у обоих матриц было **одинаковое число строк** (M) **и** одинаковое число **столбцов** (N)).

В этом случае *матрица суммы* С матриц А и В определяется как

$$\boldsymbol{C = A + B}: \quad \forall \boldsymbol{c_{ij} \in C}, \quad \boldsymbol{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}} \ (\boldsymbol{a_{ij} \in A}, \quad \boldsymbol{b_{ij} \in B}; \ \boldsymbol{i = \overline{1, M}}; \ \boldsymbol{j = \overline{1, N}})$$

(знак $\forall$ означает «каждый» или «для каждого», «для любого» – от первой буквы англ. слова All – «все», «любой», перевёрнутой «вверх ногами»; $\boldsymbol{i = \overline{1, M}}$ значит, что i пробегает все значения от 1 до M).

Например, $\boldsymbol{A} = [1; 2; 3]$, $\boldsymbol{B} = [4; 5; 6]$. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [1+4; 2+5; 3+6] = [5; 7; 9]$.

Для *умножения двух матриц* $\boldsymbol{A}_{[M\times L]}$ и $\boldsymbol{B}_{[L\times N]}$ требуется, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B. Итоговая матрица C имеет размерность (число строк матрицы A) $\times$ (число столбцов матрицы B).

В этом случае *матрица произведения* $\boldsymbol{C}_{[M\times N]}$ матриц $\boldsymbol{A}_{[M\times L]}$ и $\boldsymbol{B}_{[L\times N]}$ определяется как

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}: \quad \forall c_{ij} \in \boldsymbol{C}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{L} a_{ik}\cdot b_{kj} \;\; (a_{ij} \in \boldsymbol{A}, \;\; b_{ij} \in \boldsymbol{B}, \;\; i = \overline{1,M}; \;\; j = \overline{1,N})$$

Например, $\boldsymbol{A}_{[1\times3]} = [1; 2; 3]$, $B_{[3\times1]} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. $\mathbf{C}_{[1\times1]} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = [1\times4 + 2\times5 + 3\times6] = [32]$.

$\boldsymbol{A}_{[1\times2]} = [1; 3]$, $\boldsymbol{B}_{[2\times2]} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. $\mathbf{C}_{[1\times2]} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = [(1\times5 + 3\times7) ; (1\times6 + 3\times8)] = [26; 30]$.

Заметим, что произведение матрицы $\boldsymbol{B}$ на матрицу $\boldsymbol{A}$ (т.е. в обратном порядке) во втором примере оказывается не определено.

2. Матрица и её описатели. Определитель матрицы

Каждой квадратной (т.е. имеющей одинаковое число строк и столбцов) числовой матрице может быть сопоставлено некоторое число, именуемое *определителем*, и вычисляемое определённым образом. Определитель часто обозначается греческой буквой **Δ** (дельта), либо двумя вертикальными чертами (знак меры) вокруг членов (или, по-гречески, элементов) матрицы.

Определитель матрицы размерности (**1×1**) равен самому элементу матрицы.

Так, для матрицы [3] её определитель $\mathbf{\Delta = |3| = 3}$.

Для матриц большей размерности известно несколько способов вычисления определителя, в большей или меньшей степени удобных в разных случаях и для использования разными людьми.

Один из наиболее понятных (и универсальных) способов вычисления определителя состоит в разложении его по элементам какой-либо строки (столбца). При этом на каждом шаге такого разложения мы переходим к вычислению определителей на единицу меньшего порядка, пока не дойдём до уже известных нам определителей размерности 1.

Так, определитель матрицы $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ размерности (2×2) вычисляется, к примеру, по элементам первой строки следующим образом.

Каждый элемент первой строки (a_{11} и a_{12}) умножается на определитель, получаемый из исходной матрицы вычёркиванием того столбца и той строки, в которых стоит данный элемент. Полученные величины складываются со знаком, определяемым как **(-1)** в степени **(№ строки + № столбца)**, в которых находится вычёркиваемый элемент.

Более кратко,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)} a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^{(1+2)} a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Часто промежуточный вывод опускают и сразу пишут

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Так, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 6 - 4 = 2.$

Определитель матрицы $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ размерности **(3×3)** вычисляется через разложение первой строки подобным образом.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)} a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)} a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)} a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

К примеру,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{-4} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &= \mathbf{2\cdot(3\cdot(-4)-(-3)\cdot 7)-} \\ &\mathbf{-(-3)\cdot(4\cdot(-4)-(-3)\cdot 1)+} \\ &\mathbf{+1\cdot(4\cdot 7-3\cdot 1)=} \quad \mathbf{2(-12+21)+3(-16+3)+(28-3)=18+39+25=82} \end{aligned}$$

Подобным образом могут быть вычислены и определители квадратных матриц более высокого порядка.

3. Некоторые свойства определителя матрицы

Рассмотрим уравнение $\boldsymbol{ax = b}$ (здесь $\boldsymbol{x}$ – единственная неизвестная, «$\boldsymbol{a}$» и «$\boldsymbol{b}$» – некие постоянные (числа).

При исследовании данного уравнения выделяют три основных случая:

А. $\boldsymbol{a = b = 0}$. Тогда переменная x может принимать любое значение.

Б. $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0}$. Тогда уравнение не имеет решений.

В. $\boldsymbol{a \neq 0}$, тогда $\boldsymbol{x = \frac{b}{a}}$.

Матрица множителей при неизвестной здесь имеет размерность $\mathbf{(1\times1)}$ и записывается как $[\boldsymbol{a}]$. Заметим, что оба особых случая решения упомянутого уравнения связаны с нулевым значением $\boldsymbol{a}$, которое равно значению определителя матрицы $[\boldsymbol{a}]$.

Если взять систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$$

Матрица множителей при неизвестных здесь имеет размерность (2×2) и записывается как $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Особые случаи решения упомянутой системы из двух уравнений в общем случае уже не так очевидны, как для случая одной переменной, но хорошо просматриваются для частных примеров.

Так, если мы имеем СУ

$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = b_1 \\ 4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$, где множители при неизвестных второго уравнения равны удвоенной величине множителей для первого уравнения, то понятно, что если $b_2 = 2b_1$, то второе уравнение есть по существу повторение первого, не добавляющего никаких новых сведений для решения данной СУ. Поэтому одно из уравнений можно смело удалить как избыточное, а оставшееся содержит бесчисленное множество решений.

Если же $b_2 \neq 2b_1$, то подобная система, наоборот, не будет иметь ни одного решения.

Вычислим определитель матрицы множителей при неизвестных указанной СУ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 2a_{11} & 2a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 2a_{12} - a_{12} \cdot 2a_{11} = 0$$

Понятно, что вместо «2» могло стоять любое отличное от нуля число, при этом определитель матрицы второго порядка также равен нулю, а соответствующая СУ имеет либо бесчисленное множество решений, либо ни одного.

Говорят, что строки указанной матрицы линейно зависимы.

Оказывается, что равенство нулю и определителей матриц более высокого порядка также означает, что соответствующая им система линейных уравнений либо имеет не единственное решение, либо вовсе не имеет решений.

При исследованиях выяснилось, что линейная зависимость в матрицах не исчерпывается указанной соразмерностью множителей их строк: если такая зависимость имеется между элементами двух столбцов матрицы, то её Δ также = 0.

При вычислениях определителя можно пользоваться и другими его свойствами:

* если одну строку определителя (Δ), умноженную на какое-то отличное от нуля число, поэлементно прибавить к другой строке, то значение Δ не измениться.

Тоже свойство выполняется и по отношению к столбцам Δ.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} (a_{11}+a_{21}) & (a_{12}+a_{22}) \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+a_{21})\cdot a_{22} - (a_{12}+a_{22})\cdot a_{21} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22} + a_{21}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} - a_{22}\cdot a_{21} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} + a_{21}\cdot a_{22} - a_{22}\cdot a_{21} =$$

$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Доказать указанное свойство для столбцов матрицы **(2×2)** (как и для размерности **(3×3)**) читатель может самостоятельно.

* множитель всех элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя;

Эти свойства удобно применять для снижения трудоёмкости вычисления определителя. Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{256} & \mathbf{128} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{128}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{128\cdot(2\cdot 3 - 1\cdot 4) = 128\cdot(6-4) = 128\cdot 2 = 256.}$$

Или

$$\Delta = \begin{vmatrix} 256 & 128 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (256-42\cdot 4) & (128-42\cdot 3) \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (256-168) & (128-126) \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 88 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 44 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8\cdot(11\cdot 3-1\cdot 1) = 8\cdot(33-1) = 8\cdot 32 = 256.$$

Или

$$\Delta = \begin{vmatrix} 256 & 128 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (256-64\cdot 4) & (128-64\cdot 3) \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (256-256) & (128-192) \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -64 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\cdot 3-4\cdot(-64) = 256.$$

4. Ранг матрицы

Английское **«rank»** переводится как «чин», «класс», «разряд». По отношению к матрице «ранг» означает наибольшую содержательную размерность матрицы, наибольшую размерность подматрицы (или минора) данной матрицы, такую, что определитель этой подматрицы отличен от нуля. Другими словами, в некоторых случаях какие-то ряды матрицы могут быть линейно зависимы, не добавляют новых сведений, а лишь повторяют их. Определитель такой матрицы, соответственно, равен 0. Ранг же матрицы показывает размерность наибольшего содержательного подмножества данной матрицы.

Таким образом, если определитель матрицы отличен от нуля, то её ранг совпадает с размерностью. Если же $\boldsymbol{\Delta = 0}$, то один из простых способов поиска ранга матрицы состоит в том, чтобы вычеркнуть какую-нибудь строку и столбец матрицы и подсчитать определитель получившейся матрицы меньшей размерности. Если когда-то определитель получившейся матрицы будет отличен от нуля, мы сможем утверждать, что ранг исходной матрицы не меньше размерности найденной матрицы. Некоторая сложность при большой размерности матрицы может состоять в том, что требуется определить ненулевую подматрицу наибольшего размера, а не просто первую подходящую.

Например, размерность матрицы $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$ равна 2,

Но поскольку $\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$, то её ранг меньше 2. Вычёркивая любую строку и столбец начальной матрицы, получаем подматрицу (минор) с ненулевым определителем. Значит, **rank (A) = 1**.

4. Матрица, обратная к данной

Систему линейных уравнений можно записать и в матричном виде: $\boldsymbol{AX = B}$ (здесь $\boldsymbol{A}_{[N\times N]}$ – матрица множителей (по-английски – коэффициентов) при матрице-строке неизвестных $\boldsymbol{X}_{[1\times N]}$, а $\boldsymbol{B}_{[N\times 1]}$ – матрица-столбец свободных членов (чисел, стоящих справа от знака равенства в СУ).

Например, для системы уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 7 \end{cases}$$

матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, матрица неизвестных $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, матрица правых частей $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$.

В обычном уравнении $ax = b$, при $a \neq 0$ мы бы могли сразу записать решение этого уравнения как $x = \frac{b}{a}$, но что значит запись $X = \frac{B}{A}$ для матричного уравнения? Как вычислять матрицу $\frac{B}{A}$? Для ответа на этот вопрос вводится понятие матрицы, обратной к данной. Её обозначают как A^{-1} (для матрицы A).

Важным свойством обратной матрицы является то, что $A \times A^{-1} = E$, где E – единичная матрица (т.е. такая матрица, все элементы которой равны нулю, кроме расположенных на её главной диагонали).

Примеры единичных матриц

$$\boldsymbol{E} = [\mathbf{1}], \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

С введением понятия обратной матрицы решение СУ в матричном виде записывается как $\boldsymbol{X} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{-1} \times \boldsymbol{B}$ (понятно, что необходима проверка на $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$).

Для матрицы $\boldsymbol{A}_{[1\times1]}$ легко вычислить $\boldsymbol{A}^{-1}$, зная, что $\boldsymbol{A}_{[1\times1]} \times \boldsymbol{A}^{-1}_{[1\times1]} = \boldsymbol{E}_{[1\times1]} = [\mathbf{1}]$.

Теперь рассмотрим, как можно вычислить $\boldsymbol{A}^{-1}$ – матрицу, обратную к $\boldsymbol{A}$, в общем виде.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Приведём его для примера $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$.

1. Сначала необходимо проверить, отличен ли от нуля определитель матрицы A (иначе в дальнейшем получится попытка деления на 0).

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = \mathbf{2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2 \neq 0.}$$

2. При $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$ вычисляем для неё матрицу алгебраических дополнений $\boldsymbol{A}^{+}$ уже во многом знакомым нам способом: для каждого элемента исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ вычёркиваем строку и столбец матрицы, в котором он находится, и вычисляем определитель оставшейся матрицы (в данном случае размерности $\mathbf{1 \times 1}$), затем определяем знак полученного дополнения через **(–1)** в степени **(№ строки + № столбца)** исходного элемента.

$$A^{+}=\begin{vmatrix}(-1)^{(1+1)}a_{22}\ ;\ (-1)^{(1+2)}a_{21}\\(-1)^{(2+1)}a_{12}\ ;\ (-1)^{(2+2)}a_{11}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(-1)^{(2)}5\ ;\ (-1)^{(3)}4\\(-1)^{(3)}3\ ;\ (-1)^{(4)}2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5\ ;-4\\-3\ ;\ 2\end{vmatrix}$$

3. Повёртываем матрицу A^{+} вокруг главной диагонали. По латыни такой поворот обычно называют транспонированием и обозначают указателем (index) «Т». При этом строки матрицы меняются местами с её столбцами (а элементы главной диагонали остаются на месте).

$$(A^{+})^{T}=\begin{vmatrix}5\ ;-4\\-3\ ;\ 2\end{vmatrix}^{T}=\begin{vmatrix}5\ ;-3\\-4\ ;\ 2\end{vmatrix}.$$

4. Находят значение обратной матрицы по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}(A^{+})^{T}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5\ ;-3\\-4\ ;\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2{,}5\ ;\ 1{,}5\\2\ ;-1\end{bmatrix}$$

(заметим, что при умножении матрицы на число на него умножаются все её члены, а не только отдельной строки или столбца, как при вычислении определителя).

Проверим наши вычисления.

$$\boldsymbol{A \times A^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2{,}5\,; & 1{,}5 \\ 2 & ;-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2 \cdot (-2{,}5) + 3 \cdot 2) & ; & (2 \cdot (1{,}5) + 3 \cdot (-1)) \\ (4 \cdot (-2{,}5) + 5 \cdot 2) & ; & (4 \cdot (1{,}5) + 5 \cdot (-1)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = E.}$$