4. Найти решение переопределённой системы линейных уравнений, заданной матрицей …, и невязку этого решения.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Со школы мы привыкли к тем выводам теории, что система линейных уравнений либо имеет одно решение, либо бесконечно много, либо не имеет вовсе.

На деле же мы нередко имеем запас наблюдений (измерений), к примеру, для двух неизвестных, существенно превышающий их число, необходимое и достаточное для получения какого-то однозначного решения. Такие системы называют *переопределёнными*. Встаёт вопрос – какие из этих измерений учесть, а какие – отбросить, а если учитывать больше минимального необходимого числа, то каким образом? Как оценивать величину отклонения (или невязки) полученного решения?

Доказано, что если за величину отклонения приближённого решения СУ взять сумму квадратов отклонений (невязок) по каждому из уравнений переопределённой системы, то приведённый ниже метод наименьших квадратов даёт решение с минимальной невязкой.

1. Метод наименьших квадратов

Записываем СУ в матричном виде $A \times X = B$. Затем умножаем слева каждую сторону равенства на (A^T) – обращённую (транспонированную) матрицу A:

$A^T \times A \times X = A^T \times B$

Решив полученную систему, получаем приближённое решение исходной переопределённой системы линейных уравнений.

2. Пример. Найдём приближённое решение переопределённой системы линейных уравнений,

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 = 5 \\ 7x_1 + 8x_2 = 3 \end{cases}$$

заданной матрицей и величину его невязки.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

I. Транспонируем (повернём вокруг главной диагонали) матрицу А:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

II. $A^T \times A =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} (3\times3+5\times5+7\times7);(3\times4+5\times2+7\times8) \\ (4\times3+2\times5+8\times7);(4\times4+2\times2+8\times8) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 83; & 78 \\ 78; & 84 \end{pmatrix}$$

III. $A^T \times B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}^T =$

$$= \begin{pmatrix} 3\times3+5\times5+7\times3 \\ 4\times3+2\times5+8\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 46 \end{pmatrix}$$

IV. Решаем полученную приближённую СУ

$$\begin{pmatrix} 83; & 78 \\ 78; & 84 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 \\ 46 \end{pmatrix}$$

любым способом, например, по Крамеру:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 83; & 78 \\ 78; & 84 \end{vmatrix} = 83 \times 84 - 78 \times 78 = 6972 - 6084 = 888$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 55; & 78 \\ 46; & 84 \end{vmatrix} = 55 \times 84 - 78 \times 46 = 4620 - 3588 = 1032$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 83; & 55 \\ 78; & 46 \end{vmatrix} = 83 \times 46 - 55 \times 78 = 3818 - 4290 = -472$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1032}{888} \approx 1{,}162$$

$$x_2 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-472}{888} \approx -0{,}531$$

Подставив полученные значения в исходную систему, получим невязки по каждому из уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3 \approx 3{,}486 - 2{,}124 - 3 = -1{,}638 \\ 5x_1 + 2x_2 - 5 \approx 5{,}81 - 1{,}062 - 5 = -0{,}252 \\ 7x_1 + 8x_2 - 3 \approx 8{,}134 - 4{,}248 - 3 = 0{,}886 \end{cases}$$

Возведя каждую из них в квадрат и найдя общую сумму квадратов, получим общую невязку по данному способу:

$$(-1{,}638)^2 + (-0{,}252)^2 + (0{,}886)^2 \approx 2{,}683 + 0{,}0635 + 0{,}785 \approx 3{,}532$$