

Типовой расчёт по линейной алгебре – 2 семестр, заоч. отд.
(примеры решения некоторых задач)

3. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Если при действии линейного преобразования f на ненулевой вектор x получается тот же вектор, умноженный на какое-то число λ , то такой вектор x называется *собственным вектором* линейного преобразования f : $f(x) = \lambda(x)$. Число λ называется *собственным значением*.

1. Нахождение собственных векторов и собственных значений (алгоритм)

В матрице A порядка n линейного преобразования f на главной диагонали вычитается число λ . Определитель полученной матрицы приравнивается нулю, т.е. $\det(A - E\lambda) = 0$. Это *характеристическое уравнение*. Его решения и есть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Для каждого λ_i
решается однородная система
 $(A - \lambda_i E)X = 0$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выражаем главные переменные через свободные переменные и методом бегущей единицы (поочерёдно одну свободную переменную приравниваем единице, остальные свободные переменные приравниваем нулю, находим значения главных переменных) получаем все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i .

2. Пример. Найдём собственные векторы и собственные значения линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - E\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 4 \cdot 5 = \\ &= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда собственные значения $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 7$.

Найдём собственный вектор для $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix} 3 - (-2) & 4 \\ 5 & 2 - (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Откуда $x_1 = -0.8x_2$. x_2 – любое.

У нас одна свободная переменная x_2 . Приравняем её единице и найдём соответствующее значение главной переменной x_1 :

$$\begin{cases} x_1 = -0.8 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$X_{\lambda_1} = X_{-2} = (-0.8; 1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$.

Найдём собственный вектор для $\lambda_1 = 7$:

$$\begin{pmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или
$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Откуда $x_1 = x_2$, x_2 – любое.

У нас одна свободная переменная x_2 . Приравняем её единице и найдём соответствующее значение главной переменной x_1 :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$X_{\lambda_2} = X_7 = (1; 1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 7$.