

Типовой расчёт по линейной алгебре – 2 семестр, заоч. отд.

(примеры решения некоторых задач)

2. В некотором базисе даны векторы

$$\mathbf{x} = \{-2; 4; 7\}, \mathbf{p} = \{0, 2, 4\}, \mathbf{q} = \{2; 0; 2\}, \mathbf{r} = \{-1, 2, 4\}.$$

Показать, что векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, когда (1) не существует никакая невырожденная (т.е. с отличными от нуля длинами) линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору и (2) любой вектор данного линейного пространства при этом можно представить как линейную комбинацию векторов, образующих базис.

Известно, что базис на прямой состоит из одного ненулевого вектора на ней, базис на плоскости – из двух неколлинеарных векторов, а базис пространства – из трёх некомпланарных векторов.

1. Проверка того, что векторы образуют базис

Координаты наших векторов указаны в пространстве 3-х измерений, значит количество векторов в базисе должно быть равно трём, что соответствует условию задания.

Далее, известно [2], что условием линейной независимости трёх векторов является отличие составленного из их координат определителя от нуля. Проверим данное условие, вычислив определитель координат указанных векторов разложением по его первой строке.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{(1+2)} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2 \cdot (8 + 2) + 4 \cdot 4 = -4 \neq 0$$

Таким образом подтверждено, что оба условия образования базиса на основе векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ выполнены.

2. Определение координаты вектора в данном базисе

Координаты вектора в данном базисе есть проекции указанного вектора на каждую из осей базиса.

Так, величина проекции вектора $\vec{x}$ на вектор базиса $\vec{p}$ вычисляется следующим образом:

$$\text{pr}_{\vec{p}} \vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{p})}{|\vec{p}|}.$$

Найдём скалярное произведение $(\vec{x}, \vec{p})$ векторов

$$\vec{x} = \{-2; 4; 7\} \quad \text{и} \quad \vec{p} = \{0, 2, 4\}$$

$$(\vec{x}, \vec{p}) = -2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 4 = 8 + 28 = 36.$$

Длина вектора $\vec{p} = \{0, 2, 4\}$ вычисляется как

$$|\vec{p}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

В итоге проекция $\vec{x}$ на $\vec{p}$ равна

$$\text{pr}_{\vec{p}} \vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{p})}{|\vec{p}|} = \frac{36}{2\sqrt{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}}.$$

Подобным образом

$$\text{pr}_{\vec{q}} \vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{q})}{|\vec{q}|} = \frac{-2 \cdot 2 + 0 + 7 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 0 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{pr}_{\vec{r}} \vec{x} = \frac{(\vec{x}, \vec{r})}{|\vec{r}|} = \frac{-2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 4}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{38}{\sqrt{21}}.$$

Ссылки

1. Ефимов Н.В. Квадратичные формы. М.: Наука, 1967.
2. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Задачи и решения. М.: Бином, 2008.