

Типовой расчёт по линейной алгебре – 2 семестр, заоч. отд.

(примеры решения некоторых задач)

1. Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{8}-i}$. Записать число z в алгебраическом, тригонометрическом и показательном виде.

Комплексное число можно изобразить точкой на плоскости $M(x; y)$, где $x = \operatorname{Re}(z)$ – действительная (Real) часть комплексного числа, а $y = \operatorname{Im}(z)$ – мнимая (Imagine) часть. Такая плоскость называется комплексной плоскостью, её ось OX – действительной осью, а ось OY – мнимой осью.

Мы уже знаем, что точку на плоскости можно задать несколькими способами: как (1) проекциями её на оси в декартовой системе координат, так и (2) в полярной системе координат, рассчитав длину вектора в заданную точку из точки отсчёта и угол наклона вектора к полярной оси. Указанные подходы получили соответственно название алгебраического и тригонометрического вида представления комплексного числа.

1.2. Алгебраический вид комплексного числа

Алгебраический вид подразумевает явное выделение действительной и мнимой части комплексного числа, например, $z = 2\sqrt{5} - 3i$ (здесь действительная часть числа – $\operatorname{Re}(z) = 2\sqrt{5}$, а мнимая $\operatorname{Im}(z) = -3$).

Для нашего примера требуется дополнительное преобразование к такому виду, основанное на свойствах сложения, вычитания и произведения комплексных чисел, в частности, на том важном свойстве, что $i^2 = -1$.

Так, если умножить числитель и знаменатель исходной дроби на сопряжённое её знаменателю комплексное число (у которого действительная часть та же, а мнимая имеет обратный знак), получим:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{8}-i} = \frac{1 \cdot (\sqrt{8}+i)}{(\sqrt{8}-i) \cdot (\sqrt{8}+i)} = \frac{\sqrt{8}+i}{8-(i^2)} = \\ &= \frac{\sqrt{2 \cdot 4}+i}{8-(-1)} = \frac{2\sqrt{2}+i}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{i}{9} \end{aligned}$$

1.2. Тригонометрический вид комплексного числа

Представив комплексное число в алгебраическом виде, легко перейти от него к тригонометрическому виду представления данного числа, а именно,

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

рассчитав длину вектора в известную точку комплексной плоскости и угол наклона данного вектора к её действительной оси.

В нашем случае длина вектора (обозначается r или $|z|$)

$$r = |z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{9^2}} = \frac{1}{3}.$$

Угол наклона вектора к полярной оси вычисляется из соотношений

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}; \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}; \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

$$\text{Например, } \sin(\varphi) = \frac{y}{r} = \left(\frac{1}{9} : \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}. \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

Ответ, таким образом, будет

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = \frac{1}{3}(\cos(\arcsin(\frac{1}{3})) + i \cdot \sin(\arcsin(\frac{1}{3})))$$

.

1.3. Комплексные числа в показательном виде

На основе формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi),$$

комплексное число $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$ можно представить в так называемом показательном (степенном) виде

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$ – модуль комплексного числа, а

$$\varphi = \operatorname{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi \quad (k = 0, 1, -1, 2, -2, \dots).$$

В нашем примере

$$z = re^{i\varphi} = \frac{1}{3} e^{i \cdot \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}.$$