

Министерство образования и науки

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Московский государственный университет
приборостроения и информатики (МИРЭА)



кафедра высшей математики

к.ф.м.н., доц. Загинайко В.А.

*Линейная алгебра и
аналитическая геометрия*

Учебное пособие для студентов очной формы обучения

Москва, 2014

Составители: к.ф.м.н., доц. *Загинайко В.А.*

УДК 517.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие для студентов очной формы обучения для самостоятельного изучения материала./ Сост. к.ф.м.н., доц. *Загинайко В.А.* Изд. 2-е, испр. и доп. М.: МГУПИ (МИРЭА), 2014./

Излагаются основные понятия курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Приведены примеры решения задач. Предназначено для студентов очной формы обучения.

Рецензент: к.т.н., доц. *Пирумов А.Р.*

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Введение

Аналитическая геометрия – часть геометрии, изучающая свойства простейших геометрических фигур (точек, прямых, плоскостей, кривых и поверхностей второго порядка) с использованием представления точек в виде набора вещественных чисел – координат точки.

Аналитическая геометрия использует математический аппарат линейной алгебры. Линейная алгебра – раздел алгебры, в котором изучаются векторные (линейные) пространства. Базовыми понятиями линейной алгебры являются вводимые ниже понятия вектора и матрицы.

Гл. 1 Векторная алгебра.

§1. Понятие вектора.

1. Геометрическое определение вектора.

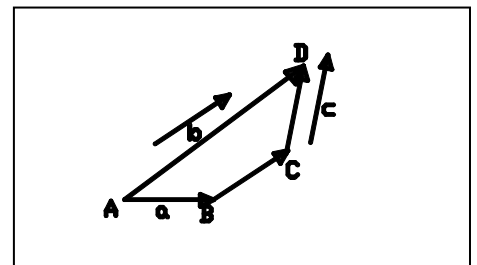
Вектор геометрический есть направленный отрезок прямой евклидова пространства, у которого один конец (скажем, точка А) называется началом, а другой конец (точка В) – концом вектора. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым вектором и обозначается $\vec{0}$. Геометрический вектор обычно обозначается стрелкой, начало которой есть точка А, а конец – точка В. Геометрический вектор характеризуется тремя величинами:

- 1) Модуль вектора (длина вектора).
- 2) Направление вектора направление (скажем, угол наклона) любой прямой, параллельной вектору.
- 3) Ориентация вектора определяет одно из двух направлений вектора на прямой.

Вектора равны, если их модули, направления и ориентации совпадают. В литературе такие вектора называют свободными векторами. Отметим основные свойства равенства: равенство рефлексивно ($\vec{a} = \vec{a}$), симметрично (если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{b} = \vec{a}$) и транзитивно (если $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$).

В векторном пространстве определено сложение векторов и умножение их на число.

Геометрическое сложение нескольких векторов: передвигаем вектора параллельным переносом так, чтобы конец предыдущего вектора совпадал с началом последующего: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ есть стрелка с началом в точке А и концом в точке D.



Геометрическое умножение вектора на число (скаляр):

- 1) модуль вектора $k\vec{a}$ в $|k|$ раз больше модуля вектора $\vec{a}$: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$,
- 2) направления $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ совпадают,

- 3) если $k > 0$ ($k = |k|$), то ориентации $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ совпадают;
 если $k < 0$ ($k = -|k|$), то ориентации $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ противоположны.

2. Алгебраическое определение вектора.

Алгебраический вектор – это строка или столбец чисел, заключённый в круглые скобки и называемых координатами вектора. Число координат определяет размерность векторного пространства (множества векторов). На прямой вектор характеризуется одним числом, на плоскости – двумя, в пространстве – тремя и т.д. Обозначение: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z, \dots)$

Сложение двух алгебраических векторов определяется формулой:
 $(a_x, a_y, \dots) + (b_x, b_y, \dots) = (a_x + b_x, a_y + b_y, \dots)$.

Умножение алгебраического вектора на число (скаляр) даётся формулой:
 $k(a_x, a_y, \dots) = (ka_x, ka_y, \dots)$.

3. Аксиоматическое определение вектора.

Векторное пространство – множество объектов, называемых векторами, в котором определены операции сложения вектора и умножения их на скаляр (вещественное или комплексное число), обладающие определёнными свойствами (см. ниже свойства вектора, § 2). Геометрическое и алгебраическое определение вектора дают геометрическую и алгебраическую модели векторного пространства. Можно доказать корректность (правильность) этих определений, иначе: геометрическая и алгебраическая модели обладают свойствами векторного пространства.

§2 Свойства векторов.

1. Аксиомы векторного пространства.

В этом пространстве определены операции сложения и умножения на число.

Относительно сложения векторное пространство образует абелеву (коммутативную) группу.

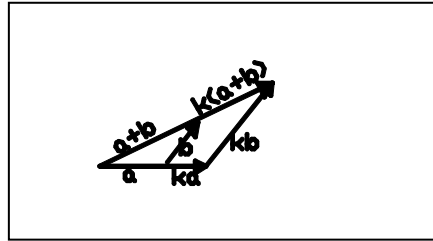
Аксиомы группы.

1. Ассоциативность (сочетательный закон): $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
2. Существует нулевой вектор $\vec{0}$ (модуль равен нулю, направление и ориентация не определены), такой, что: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
3. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $-\vec{a}$ такой, что: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
4. Коммутативность (перестановочность или переместительный закон): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Относительно умножения на число векторное пространство удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Ассоциативность (сочетательность или сочетательный закон):

$$(k \cdot l)\vec{a} = k(l\vec{a}) .$$
2. Дистрибутивность (распределительность или распределительный закон):
 - 2.1. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ и
 - 2.2. $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a} .$
3. Умножение на числовую единицу: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a} .$
4. Коммутативность: $k\vec{a} = \vec{a}k .$



Последнее свойство следует рассматривать как определение выражения: $\vec{a} \cdot k$. Алгебраические вектора удовлетворяют этим аксиомам, так как одномерные вектора (числа) удовлетворяют этим же аксиомам. Выполнение указанных свойств для геометрических векторов можно проиллюстрировать рисунками (см. рисунок, иллюстрирующий свойство 2.1).

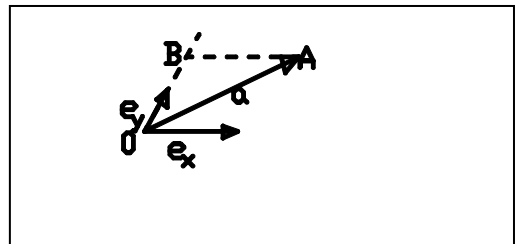
2. Разложение вектора по базису.

Связь между алгебраической и геометрической моделями (представлениями) вектора определяется операцией (алгоритмом) разложения вектора по базису.

Задача: на плоскости даны два неколлинеарных (непараллельных) вектора $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$, образующие базис плоскости. Разложить заданный вектор $\vec{a}$, лежащий в плоскости по базису $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, то есть найти такие числа x и y , чтобы выполнялось равенство: $\vec{a} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$.

Решение (геометрическое).

1. Параллельным переносом векторов базиса перенесём их начала в заданную точку, которую назовём началом координат плоскости (точка O).
2. Проведём из конца вектора $\vec{a}$ (точка A) прямую, параллельную $\vec{e}_x$ до пересечения с прямой вектора $\vec{e}_y$, (проходящей через начало координат) в точке B. Введём операцию деления коллинеарных векторов следующим образом: $\overrightarrow{OB} / \vec{e}_y$ есть число, модуль



(абсолютная величина) которого есть $\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\vec{e}_y|}$. Знак этого числа –

положительный, если ориентации векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\vec{e}_y$ совпадают и отрицательный, если ориентации этих векторов – противоположны. Тогда из рисунка видно что:

$$\vec{a} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} = \left(\frac{\vec{OB}}{\vec{e}_y} \right) \cdot \vec{e}_y + \left(\frac{\vec{BA}}{\vec{e}_x} \right) \cdot \vec{e}_x = y\vec{e}_y + x\vec{e}_x = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, \text{ где}$$

$$x = \left(\frac{\vec{BA}}{\vec{e}_x} \right) \text{ и } y = \left(\frac{\vec{OB}}{\vec{e}_y} \right), \text{ что и требовалось доказать.}$$

Для заданного базиса связь между геометрическим и алгебраическим представлением вектора на плоскости даётся формулой:

$$\vec{a} = (x, y) = (x, y)(\vec{e}_x, \vec{e}_y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y.$$

Определение: (x, y) суть аффинные координаты вектора $\vec{a}$ в аффинном базисе $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, если $\vec{a} = (x, y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

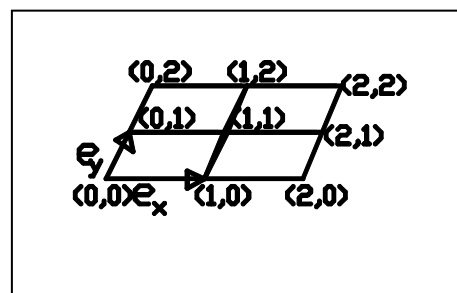
Прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ образуют на плоскости аффинную сетку (на рисунке показаны координаты некоторых точек аффинной сетки).

Определение: если $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$ и $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$, то

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ образуют декартов базис, а (x, y)

называются декартовыми координатами вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{i} = \vec{e}_x$, $\vec{j} = \vec{e}_y$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ суть вектора декартова базиса.



Задача: в декартовом базисе даны вектора $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$. Разложить вектор $\vec{c} = (c_x, c_y)$ по базису $(\vec{a}, \vec{b})$. Иначе: найти скаляры x, y такие, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Решение. Пишем векторное равенство в алгебраическом виде:

$$x(a_x, a_y) + y(b_x, b_y) = (c_x, c_y) \text{ или } (x \cdot a_x + y \cdot b_x, x \cdot a_y + y \cdot b_y) = (c_x, c_y).$$

Задача сводится к решению системы двух уравнений с двумя

$$\text{неизвестными: } \begin{cases} a_x \cdot x + b_x \cdot y = c_x \\ a_y \cdot x + b_y \cdot y = c_y \end{cases}.$$

§ 3. Скалярное произведение.

1. Различные определения скалярного произведения.

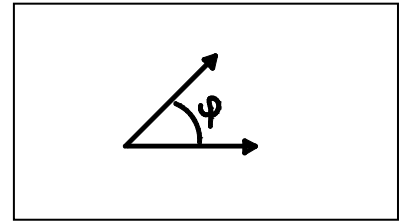
Аксиоматическое определение. Скалярное произведение есть скалярная билинейная симметрическая функция двух векторов, принимающая на векторах декартова базиса следующие значения: $(\vec{i} \cdot \vec{i}) = (\vec{j} \cdot \vec{j}) = (\vec{k} \cdot \vec{k}) = 1$, $(\vec{i} \cdot \vec{j}) = (\vec{j} \cdot \vec{k}) = (\vec{i} \cdot \vec{k}) = 0$.

Аксиомы скалярного произведения.

1. Билинейность: $((k\vec{a} + l\vec{b}) \cdot \vec{c}) = k(\vec{a} \cdot \vec{c}) + l(\vec{b} \cdot \vec{c})$,
 $(\vec{a} \cdot (k\vec{b} + l\vec{c})) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) + l(\vec{a} \cdot \vec{c})$.
2. Симметричность (коммутативность, перестановочность):

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a}).$$

Геометрическое определение: скалярное произведение есть число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$.



Алгебраическое определение: скалярное произведение есть сумма попарных произведений соответствующих координат векторов-сомножителей в общем декартовом базисе. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = ((a_x, a_y, \dots) \cdot (b_x, b_y, \dots)) = a_x b_x + a_y b_y + \dots$.

Эквивалентность этих определений.

1. Геометрическая модель скалярного произведения удовлетворяет (соответствует) аксиоматическому определению.

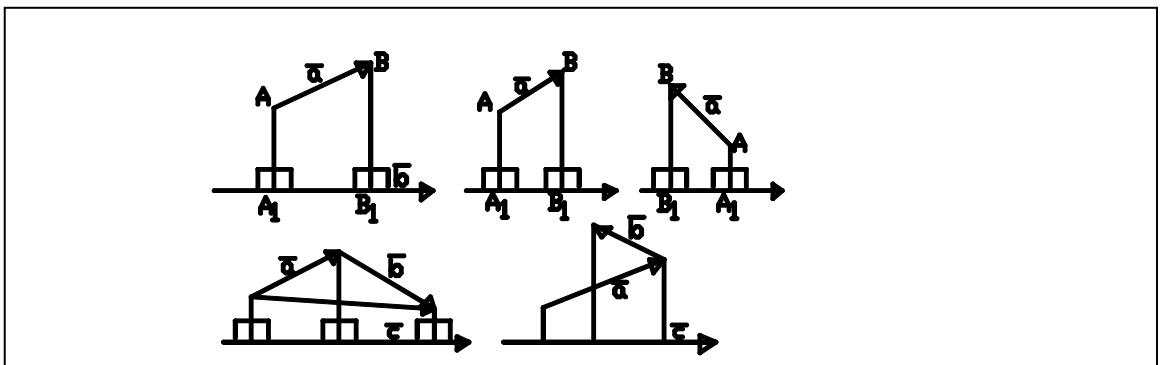
1.1. Билинейность:

Теорема: Геометрическое скалярное произведение есть произведение модуля одного вектора на проекцию на него другого вектора.

Определение: проекция одного вектора на другой вектор определяется как скаляр, причём модуль проекции есть расстояние (длина отрезка) между ортогональными проекциями первого вектора на направление второго вектора. Знак проекции определяется соответствием ориентации векторов $\vec{A_1B_1}$ и $\vec{b}$, где A_1 – проекция начала вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{b}$

(основание перпендикуляра, опущенного из начала $\vec{a}$ на прямую, на которой расположен вектор $\vec{b}$); B_1 – проекция конца $\vec{a}$ на прямую $\vec{b}$. Если ориентации совпадают, то проекция положительна, если не совпадают, то проекция отрицательна.

Пример.



Доказательство билинейности геометрического скалярного произведения вытекает из того, что проекция суммы векторов равна алгебраической сумме его проекций, а проекция произведения вектора на число равна произведению этого числа на проекцию этого вектора:

$$(\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})) = |\vec{a}| np_a(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|(np_a \vec{b} + np_a \vec{c}) = |\vec{a}| np_a \vec{b} + |\vec{a}| np_a \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}).$$

- 1.2. Симметричность следует из того, что $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$.
2. Из аксиоматического определения скалярного произведения следует алгебраическое. Доказательство (для двумерного случая):

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= ((a_x, a_y) \cdot (b_x, b_y)) = ((a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) \cdot (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j})) = \\
 &= a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_y b_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) = \\
 &= a_x b_x \cdot 1 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_x \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1 = a_x b_x + a_y b_y .
 \end{aligned}$$

3. Из алгебраического определения скалярного произведения следуют аксиоматическое и геометрическое. Это можно вывести из теоремы Коши-Буняковского или из теоремы косинусов для треугольника, образованного векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и

$$\vec{a} - \vec{b} : \cos(\varphi) = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} \sqrt{(\vec{b} \cdot \vec{b})}} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2}{2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1.$$

Неравенство Коши-Буняковского для многомерных векторов :

$$\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} \sqrt{(\vec{b} \cdot \vec{b})}} \leq 1 \text{ вытекает из того, что дискриминант}$$

неотрицательного квадратного трёхчлена не больше единицы:

$$|(x\vec{a} - \vec{b})|^2 = ((x\vec{a} - \vec{b}) \cdot (x\vec{a} - \vec{b})) = x^2(\vec{a} \cdot \vec{a}) - 2x(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{b} \cdot \vec{b}) \geq 0, \text{ что (для}$$

любого вещественного x) может быть только при неположительном

дискриминанте: $\frac{D}{4} = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - (\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{b}) \leq 0$. Отсюда:

$$\sqrt{\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{b})}} \leq \sqrt{1} . \text{ Поэтому угол между многомерными векторами } \vec{a}$$

и $\vec{b}$ может быть определён как: $\varphi = \arccos \left(\frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} \sqrt{(\vec{b} \cdot \vec{b})}} \right)$.

2. Использование скалярного произведения.

В математике скалярное произведение даёт возможность вычислить длину вектора и угол между двумя векторами в декартовых координатах.

$$\text{Длина вектора: } |\vec{a}| = (a_1, a_2, \dots) = \sqrt{|\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0)} = \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \dots} .$$

$$\text{В частности: } |(a_x, a_y)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ и } |(a_x, a_y, a_z)| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

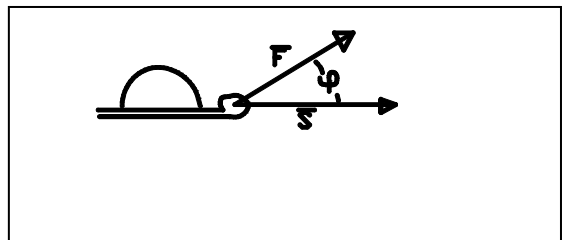
Угол между двумя векторами:

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})} \sqrt{(\vec{b} \cdot \vec{b})}} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + \dots}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + \dots} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + \dots}} .$$

В физике скалярное произведение

есть работа постоянной силы $\vec{F}$
по перемещению тела на путь $\vec{S}$:

$$A = (\vec{F} \cdot \vec{S}) .$$



§ 4. Понятие определителя.

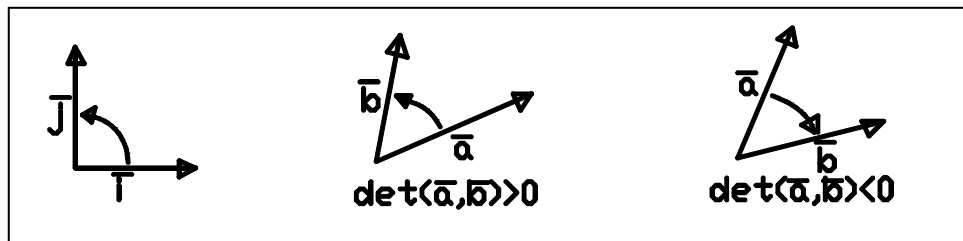
1. Геометрическое определение.

Определитель есть ориентированный объём параллелепипеда (в трёхмерном пространстве) или ориентированная площадь (в двумерном пространстве), натянутый на заданные вектора-аргументы.

Определение: Ориентированный объём (площадь) по абсолютной величине равен объёму (площади) соответствующего параллелепипеда (параллелограмма). Знак ориентированного объёма (площади) положителен, если ориентация тройки (пары) векторов, на которые натянут параллелепипед (параллелограмм), совпадает с ориентацией тройки (пары) базисных векторов. Знак отрицателен, если эти ориентации противоположны. Параллелограмм, натянутый на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть множество концов векторов $\vec{M} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где $(0 \leq x \leq 1)$ и $(0 \leq y \leq 1)$, причём начало векторов $\vec{M}$ совпадает с общим началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Процесс натягивания параллелограмма или параллелепипеда ясен из рисунка.

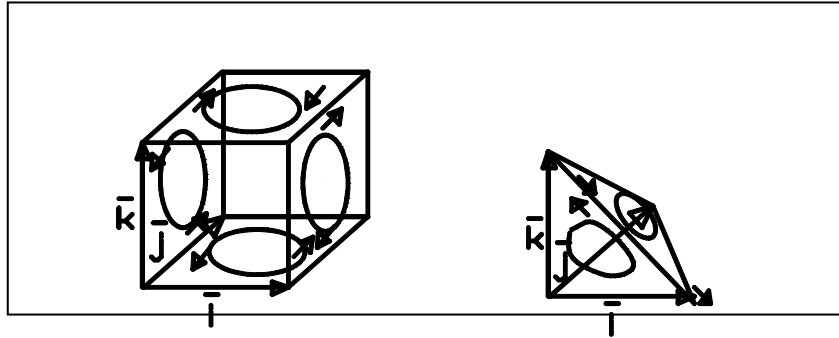


Ориентация упорядоченной пары векторов с общим началом определяется направлением вращения (по или против часовой стрелки) от первого вектора ко второму. Ориентацию тройки векторов в пространстве можно представить на основе модели ориентации большого, указательного и среднего пальцев левой руки (левая ориентация) или правой руки (правая ориентация). При прохождении указательного пальца через плоскость большого и среднего пальца ориентация этих пальцев-векторов меняет знак, равно как и соответствующий ориентированный объём, проходя через нулевое значение (ориентированный объём равен нулю, когда три его вектора-аргумента находятся в одной плоскости).



Строго говоря, ориентация параллелепипеда или тетраэдра определяется ориентацией его граней, который выбираются таким образом, чтобы ориентации смежных рёбер были противоположны.

При перестановке каких-либо двух векторов тройки ориентация всей тройки меняется на противоположную. Ориентация тройки соответствует ориентации тетраэдра.



2. Аксиоматическое определение определителя.

Определитель есть скалярная полилинейная антисимметрическая числовая функция от n векторов в n -мерном пространстве, принимающая на наборе базисных векторов значение единица. n -мерное пространство понимается как множество алгебраических векторов вида: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Аксиомы определителя ($(n = 2)$).

1. Полилинейность:

$$\det((k\vec{a} + l\vec{b}), \vec{c}) = k \cdot \det(\vec{a}, \vec{c}) + l \cdot \det(\vec{b}, \vec{c}).$$

2. Антисимметричность (антикоммутативность):

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a}).$$

3. $\det(\vec{i}, \vec{j}) = 1$.

3. Алгебраическое определение определителя.

Пусть (a_{ij}) таблица из n^2 чисел, состоящая из n строк и n столбцов,

называемая квадратной матрицей: $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Пусть $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, ..., $\vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ –

вектора, определённые строками матрицы. Пусть $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n \\ i_1, & i_2, & \dots & i_n \end{pmatrix}$ есть какая-

либо перестановка чисел натурального ряда от единицы до n . Например,

$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}$ есть перестановка чисел 1 и 2.

Обозначим $\varepsilon \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots & n \\ i_1, & i_2, & \dots & i_n \end{pmatrix} = +1$, если последовательность натуральных чисел $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ получается из последовательности $(1, 2, \dots, n)$ чётным числом элементарных перестановок пары каких-либо

двух чисел из последовательности $(1, 2, \dots, n)$, и $\varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_n \end{pmatrix} = -1$, если число таких перестановок нечётно. При этом, соответственно, последовательность чисел $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ называется чётной или нечётной перестановкой.

Пример: $\varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 2, 3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 3, 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 3, 1, 2 \end{pmatrix} = +1$ и,

соответственно,

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 3, 2, 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 2, 1, 3 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \\ 1, 3, 2 \end{pmatrix} = -1.$$

Определение: определитель алгебраический квадратной матрицы

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ определяется формулой:}$$

$$\det(A) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \varepsilon \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_n \end{pmatrix} (a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}). \text{ Здесь суммирование}$$

производится по всем перестановкам: $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, причём элементы матрицы в произведении: $(a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n})$ всегда берутся из разных строк и из разных столбцов.

Обозначение определителя:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n), \text{ где}$$

$$\vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

4. Алгебра Грассмана.

Элементами алгебры Грассмана являются выражения вида: $\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \dots \wedge \vec{a}_k$, где сомножители суть вектора, а $\wedge$ – символ грассманова произведения, удовлетворяющего трём аксиомам.

1. Линейность по каждому из сомножителей:

$$(\vec{a}_1 \wedge \dots \wedge (k\vec{a} + l\vec{b}) \wedge \dots) = k(\vec{a}_1 \wedge \dots \wedge \vec{a} \wedge \dots) + l(\vec{a}_1 \wedge \dots \wedge \vec{b} \wedge \dots).$$

2. Антикоммутативность: $(\dots \wedge \vec{a} \wedge \dots \wedge \vec{b} \wedge \dots) = -(\dots \wedge \vec{b} \wedge \dots \wedge \vec{a} \wedge \dots).$

3. Ассоциативность: $((\vec{a} \wedge \dots \wedge \vec{b}) \wedge \dots \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \dots \wedge (\vec{b} \wedge \dots \wedge \vec{c})).$

Из этих аксиом вытекает теорема: в n – мерном пространстве алгебраических векторов грассманово произведение n векторов равно определителю от этих векторов умноженному на грассманово произведение векторов базиса.

Доказательство проведём на примере двух векторов на плоскости.

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 &= (a_{11}, a_{12}) \wedge (a_{21}, a_{22}) = (a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2) \wedge (a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) = \\ &= a_{11}a_{21}(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1) + a_{11}a_{22}(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + a_{12}a_{21}(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1) + a_{12}a_{22}(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2) = \\ &= a_{11}a_{21}(0) + a_{11}a_{22}(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + a_{12}a_{21}(-\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + a_{12}a_{22}(0) = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2). \end{aligned}$$

Нули возникают от того, что при $x = \vec{a} \wedge \vec{a}$, при перестановке сомножителей $\vec{a} \wedge \vec{a}$ не меняется и в тоже время меняет знак. Отсюда $x = -x$; $2x = 0$; $x = 0$.

Внешнее произведение $\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$ можно представить себе в виде параллелограмма, натянутого на вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Здесь есть некоторая аналогия между именованными и отвлечёнными числами: определитель есть отвлечённое число, гассманово произведение есть именованное число, а $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)$ можно представить себе как единицу измерения (именованное число).

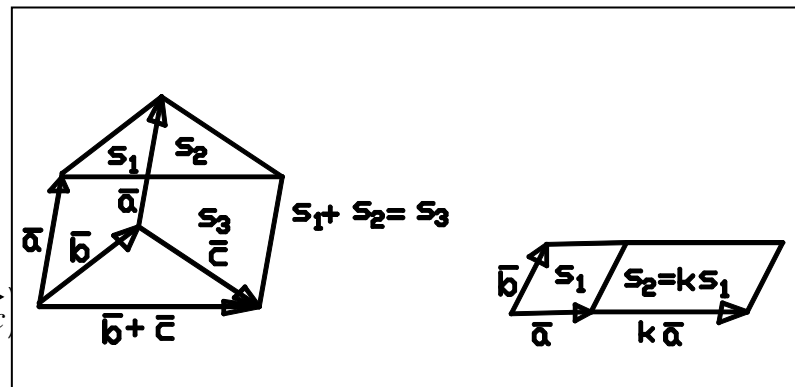
5. Эквивалентность определений.

Схема доказательства эквивалентности алгебраического, геометрического и аксиоматического определений определителя.

1. Геометрическое определение удовлетворяет аксиомам определителя (аксиоматическому определению).
- 1.1. Линейность (рассмотрим случай $n = 2$ на плоскости)

$$\det(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + \det(\vec{a}, \vec{c})$$

$$\det(k\vec{a}, \vec{b}) = k \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}).$$



- 1.2. Антикоммутативность вытекает из того, что при изменении порядка сомножителей ориентация меняется на противоположную.
2. Из аксиоматического определения вытекает алгебраическое. Линейность и антикоммутативность определителя соответствуют линейности и антикоммутативности гассманова произведения. Поэтому вычисление алгебраической формы повторяет вычисление определителя через гассманово произведение (с учётом того, что, например, в случае $n = 2$ $|\text{плоскость}| \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$ соответствует $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$).
3. Из алгебраического определения вытекает аксиоматическое. Иначе говоря, вытекает линейность, антикоммутативность и единица на базисных векторах. Антикоммутативность означает, что при перестановке строк определитель меняет знак. Это вытекает из того, что чётные перестановки меняются на нечётные и наоборот.

Теорема. Определитель не меняется при транспонировании его матрицы.

Определение. Транспонирование матрицы есть перестановка элементов a_{ij} и a_{ji} матрицы, иначе говоря, это поворот плоскости матрицы вокруг оси её главной диагонали (где расположены элементы a_{ii} , у которых номер строки совпадает с номером столбца). Транспонирование обозначается звёздочкой в правом верхнем углу матрицы.

Пример. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, где * – знак транспонирования.

Доказательство теоремы о транспонировании матрицы определителя вытекает из его линейности и антикоммутативности не только по строкам, но и по столбцам. Линейность очевидна, антикоммутативность следует из разложения определителя в линейную комбинацию (сумму со скалярными коэффициентами) элементарных определителей, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + a_{12}a_{21} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Любая перестановка столбцов в элементарном определителе может быть выполнена перестановкой некоторых строк, т.е. вызывает изменение знака у

каждого элементарного определителя. Пример: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Теорема. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство.

$$x = \det(\vec{a}, \vec{a}) = -\det(\vec{a}, \vec{a}) = -x; \quad x = -x; \quad 2x = 0; \quad x = 0, \quad \text{ч.т.д.}$$

Теорема. Определитель не меняется, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на постоянный коэффициент.

Доказательство. Идея доказательства просматривается на частном случае.

Пример. $\det(\vec{a} + k\vec{b}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + k \cdot \det(\vec{b}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b}) + 0 = \det(\vec{a}, \vec{b}), \quad \text{ч.т.д.}$

6. Вычисление определителя.

По алгебраической формуле алгебраического определителя обычно вычисляется определитель второго, реже – третьего порядка. В общем случае обычно путём эквивалентных преобразований (прибавлением или вычитанием к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на подходящую константу (множитель)) обнуляют как можно большее количество элементов матрицы определителя, после чего разлагают его по строке (столбцу) с большим количеством нулей.

Разложение определителя по строке (столбцу).

Определение. Минором M_{ij} определителя, соответствующим элементу a_{ij} определителя, находящемуся на пересечении i -ой строки и j -ого столбца, называется определитель матрицы, полученной из исходного определителя вычёркиванием i -ой строки и j -ого столбца, на пересечении которых находится вышеупомянутый элемент.

Теорема о разложении определителя по i -ой строке.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot M_{i1} \cdot (-1)^{i+1} + \dots + a_{ij} \cdot M_{ij} \cdot (-1)^{i+j} + \dots + a_{in} \cdot M_{in} \cdot (-1)^{i+n}$$

.

Аналогично, разложение определителя по j -му столбцу даётся формулой:

$$A = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + \dots + (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj} .$$

Множители вида: $(-1)^{i+j}$ дают «шахматное правило» изменения знаков слагаемых:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Доказательство вытекает из требования ассоциативности грасманова произведения векторов. Проведём его на примере разложения определителя третьего порядка по первой строке. Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3 &= \vec{a}_1 \wedge (\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3) = \\ &= (a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2 + a_{13} \vec{e}_3) \wedge (a_{21} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{23} \vec{e}_3) \wedge (a_{31} \vec{e}_1 + a_{32} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3) = \\ &= (a_{11} \vec{e}_1 + a_{12} \vec{e}_2 + a_{13} \vec{e}_3) \wedge \left(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3) + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_{11} M_{11} (\vec{e}_1 \wedge (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3)) + a_{12} M_{12} (\vec{e}_2 \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3)) + a_{13} M_{13} (\vec{e}_3 \wedge (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2)) = \\ &= (a_{11} M_{11} + a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}) (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) . \end{aligned}$$

Сокращая на элемент $(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3)$, получаем искомое разложение определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

7. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.

Решение системы по правилу Крамера проведём на примере системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Имеем систему: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ или в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{или } \vec{a}_1 \cdot x + \vec{a}_2 \cdot y = \vec{b}, \text{ где } \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис плоскости, и вектор $\vec{b}$ можно разложить по нему. Необходимое условие – непараллельность векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, т.е. объём натянутого на них параллелограмма не равен нулю: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда строим дуальный (взаимный) базис по формулам:

$$\vec{a}^1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_{12} \\ \vec{j} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}\vec{i} - a_{12}\vec{j} = (a_{22}, -a_{12}), \quad \vec{a}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \vec{i} \\ a_{21} & \vec{j} \end{vmatrix} = a_{11}\vec{j} - a_{21}\vec{i} = (-a_{21}, a_{11}).$$

Далее вычисляем скалярные произведения:

$$\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}^1 \right) = \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}^2 \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}^2 \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0; \quad \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}^1 \right) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Скалярные произведения суть попарные произведения компонент базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ на компоненты – миноры взаимного базиса.

Далее, умножаем разложение вектора $\vec{b}$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ скалярно на

$$\text{вектора дуального базиса: } \begin{cases} x_1 \cdot \left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}^1 \right) + x_2 \cdot \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}^1 \right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}^1 \right) \\ x_1 \cdot \left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}^2 \right) + x_2 \cdot \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}^2 \right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}^2 \right) \end{cases}. \text{ Поскольку:}$$

$$\begin{cases} \left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}^1 \right) = 0 \\ \left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}^2 \right) = 0 \end{cases},$$

То получаем отсюда правило Крамера в векторном виде:

$$x_1 = \frac{\left(\vec{b} \cdot \vec{a}^1 \right)}{\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}^1 \right)}; \quad x_2 = \frac{\left(\vec{b} \cdot \vec{a}^2 \right)}{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}^2 \right)}$$

или правило Крамера для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \text{ в форме частных от определителей матриц:}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Аналогично выводится правило Крамера для решения системы уравнений третьего порядка с тремя неизвестными ($n = 3$):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Правило Крамера: $x_1 = \frac{\left(\vec{b} \cdot \vec{a}^1\right)}{\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}^1\right)} = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{\left(\vec{b} \cdot \vec{a}^2\right)}{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}^2\right)} = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{\left(\vec{b} \cdot \vec{a}^3\right)}{\left(\vec{a}_3 \cdot \vec{a}^3\right)} = \frac{D_3}{D},$

где: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$\vec{a}^1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & a_{12} & a_{13} \\ \vec{j} & a_{22} & a_{23} \\ \vec{k} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \vec{a}^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \vec{i} & a_{13} \\ a_{21} & \vec{j} & a_{23} \\ a_{31} & \vec{k} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \vec{a}^3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \vec{i} \\ a_{21} & a_{22} & \vec{j} \\ a_{31} & a_{32} & \vec{k} \end{vmatrix}.$$

Аналогично выводится правило Крамера в общем виде для системы n уравнений с n неизвестными.

§ 5 Векторное произведение.

1. Определения.

1.1 Алгебраическое определение.

Векторное произведение двух векторов в пространстве:

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} = (b_x, b_y, b_z)$, где $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – декартов (ортонормированный) базис (ортогональность: $(\vec{i} \cdot \vec{j}) = (\vec{i} \cdot \vec{k}) = (\vec{j} \cdot \vec{k}) = 0$, нормированность: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$) определяется по формуле:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

1.2 Геометрическое определение.

Векторное произведение двух векторов в пространстве задаётся тремя характеристиками: модуль, направление и ориентация.

1. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, натянутого на вектора – сомножители.
2. Направление векторного произведения определяется направлением перпендикуляра к плоскости векторов – сомножителей, иначе говоря, векторное произведение ортогонально (перпендикулярно) векторам – сомножителям.
3. Ориентация векторного произведения определяется так: тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}))$ должна быть ориентирована так же, как и тройка векторов декартова базиса: $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Покажем, что из алгебраического определения вытекает геометрическое.

1. Проверка ортогональности: направление алгебраически определённого векторного произведения совпадает с направлением геометрически определённого векторного произведения. Имеем:

$$(\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}) = 0. \text{ Аналогично:}$$

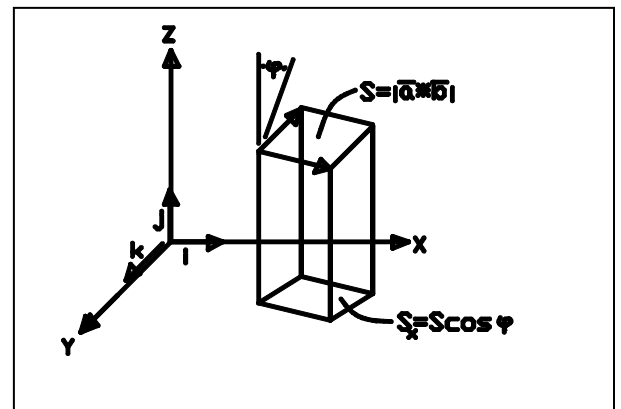
$$(\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})) = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \det(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

2. Проверка модуля. Проекция параллелограмма, натянутого на $(\vec{a}, \vec{b})$ на плоскость XOY есть, с одной стороны, площадь его проекции, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \text{ а с другой стороны, она есть}$$

$S \cdot \cos(\varphi)$, где S – площадь параллелограмма, натянутого на вектора – сомножители $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Здесь φ – угол между плоскостями этого параллелограмма и плоскостью XOY или, что то же самое, угол между базисным вектором $\vec{k}$ и вектором $(\vec{a} \times \vec{b})$ векторного произведения. Очевидно, длина проекции

$$\vec{n} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{|(\vec{a} \times \vec{b})|} \text{ (единичного вектора, направленного вдоль } (\vec{a} \times \vec{b}))$$



на горизонтальную плоскость $ХОУ$ есть $\cos(\varphi)$. Проводя аналогичные рассуждения с другими координатными плоскостями, получаем: $n = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\varphi))$, где α, β и φ – углы вектора n с осями координат. Поэтому

$$|n| = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \sqrt{(\cos(\alpha))^2 + (\cos(\beta))^2 + (\cos(\varphi))^2} = 1. \text{ Отсюда:}$$

$$S_{al} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2} = \sqrt{(S \cos \alpha)^2 + (S \cos \beta)^2 + (S \cos \varphi)^2} = S \sqrt{1} = S_g$$

что и требовалось доказать. Итак, модуль векторного произведения алгебраического S_{al} равен модулю векторного произведения геометрического S_g .

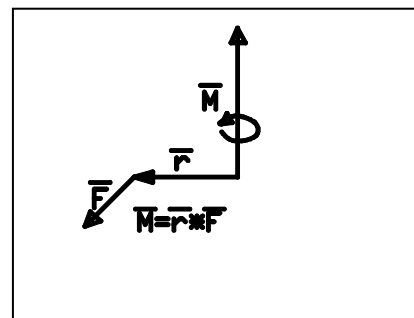
3. Проверка ориентации. Ориентация тройки $(\vec{a}, \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}))$ соответствует ориентации тройки базисных векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. В самом деле, $\det(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = 1 > 0$ и

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b})) = \det((\vec{a} \times \vec{b}), \vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} > 0$$

Полученные неравенства показывают соответствие ориентаций троек $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и $(\vec{a}, \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}))$, ч.т.д.

2. Механический смысл векторного произведения.

Векторное произведение плеча силы $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$ есть момент силы: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Особенность момента силы состоит в том, что он не меняет своего знака при одновременном изменении ориентации (знака) силы и плеча.

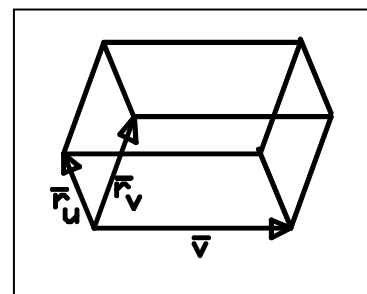


3. Смешанное произведение трёх векторов.

Смешанное произведение трёх векторов определяется как скалярное произведение первого вектора на векторное произведение двух других векторов: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$. Нетрудно видеть, что это есть не что иное, как ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в пространстве: $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}))$.

Механический смысл смешанного произведения.

Смешанное произведение $\vec{v} \cdot \vec{S} = \vec{v} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) = \det(\vec{v}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$ есть количество (объём) жидкости, притекающей со скоростью $\vec{v}$ в единицу времени через площадку $\vec{S} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$.



Историческая справка: Векторное произведение было введено в математику в связи с попытками Гамильтона построить многомерную теорию комплексных чисел. Им были построены кватернионы – комплексные числа с тремя мнимыми единицами

вида: $r + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, причём $i \cdot j = -j \cdot i = k$;
 $j \cdot k = -k \cdot j = i$ и $k \cdot i = -i \cdot k = j$. Произведение чисто мнимых кватернионов
 может быть выражено через скалярное и векторное произведения этих
 кватернионов, рассматриваемых как вектора, а мнимые единицы как вектора
 декартова базиса. Именно: $a \cdot b = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k) = -(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b})$
 . К сожалению, дальнейшее продвижение в этом направлении (увеличения
 числа мнимых единиц) оказалось невозможным. Это, в частности, объясняет,
 почему векторное произведение работает только в трёхмерном пространстве.

Оглавление гл. 1.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия.	3
Введение	3
§1. Понятие вектора.	3
1. Геометрическое определение вектора.	3
2. Алгебраическое определение вектора.	4
§2 Свойства векторов.	4
1. Аксиомы векторного пространства.	4
2. Разложение вектора по базису.	5
§ 3. Скалярное произведение.	6
1. Различные определения скалярного произведения.	6
2. Использование скалярного произведения.	8
§ 4. Понятие определителя.	9
1. Геометрическое определение.	9
2. Аксиоматическое определение определителя.	10
3. Алгебраическое определение определителя.	10
4. Алгебра Грассмана.	11
5. Эквивалентность определений.	12
6. Вычисление определителя.	13
7. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера.	15
§ 5 Векторное произведение.	16
1. Определения.	16
1.1 Алгебраическое определение.	16
1.2 Геометрическое определение.	17
2. Механический смысл векторного произведения.	18
3. Смешанное произведение трёх векторов.	18

Гл. 2. Аналитическая геометрия прямых и плоскостей

Введение

Аналитическая геометрия изучает свойства простейших фигур (точек, прямых, плоскостей, поверхностей второго порядка) с использованием представления точек пространства в виде набора координат (алгебраических векторов) с использованием аппарата векторной (линейной) алгебры. Линейная алгебра – раздел алгебры, в котором изучаются векторные (линейные) пространства с использованием понятий вектора и матрицы и алгебраических операций над ними. Точка на плоскости или в пространстве имеет координаты своего радиуса – вектора, начало которого совпадает с началом координат. Прямые, проходящие через начало координат (отмеченную точку на плоскости или в пространстве), направление и ориентация которых совпадает с базисом, по которому разлагаются вектора пространства суть оси координат.

Определение. Координаты точки суть числовые компоненты её радиуса – вектора при фиксированном базисе и начале координат.

§ 1. Прямые на плоскости

Теорема. Уравнение прямой на плоскости имеет вид: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, где для всех точек прямой тройки чисел (A, B, C) определены с точностью до коэффициента пропорциональности, т.е. числа (A, B, C) и (kA, kB, kC) определяют одну и ту же прямую.

Доказательство.

1. Если три точки

$M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$, $M_3 = (x_3, y_3)$ удовлетворяют уравнению прямой при фиксированных (A, B, C) , т.е.

$$\begin{cases} A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C = 0 \\ A \cdot x_2 + B \cdot y_2 + C = 0 \\ A \cdot x_3 + B \cdot y_3 + C = 0 \end{cases}, \text{ то эти точки лежат на одной прямой.}$$

1.1 Вычитаем из второго и третьего уравнений первое:

$$\begin{cases} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0 \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) = 0 \end{cases}. \text{ Отсюда}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \det(\overrightarrow{M_2 - M_1}, \overrightarrow{M_3 - M_1}) = \det(\overrightarrow{M_1 M_2}, \overrightarrow{M_1 M_3}) = 0,$$

т.е. параллелограмм, натянутый на вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ и $\overrightarrow{M_1 M_3}$ равен нулю, из чего вытекает, что эти вектора лежат на одной прямой.

2. Пусть точки

$M_1 = (x_1, y_1)$, $M_2 = (x_2, y_2)$, $M_3 = (x_3, y_3) = M = (x, y)$ лежат на одной прямой. Тогда из рассуждений п. 1.1. следует, что:

$$0 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Разлагая последний определитель по верхней строке, получаем уравнение прямой вида: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, ч. т. д.

Теорема. Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) , перпендикулярно своей нормали (перпендикуляр): $\vec{N} = (A, B)$, имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Доказательство. Пусть уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) имеет вид: $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$, где (x, y) – произвольная точка прямой. Тогда, вычитая уравнения :

$$\begin{cases} A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \\ A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0 \end{cases}, \text{ получаем:}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 = ((A, B) \cdot (x - x_0), (y - y_0)) \text{ или:}$$

$$(\vec{N} \cdot \vec{M_0 M}) = 0, \text{ где } \vec{N} = (A, B) \text{ и}$$

$\vec{M_0 M} = \vec{M} - \vec{M_0} = (x, y) - (x_0, y_0) = ((x - x_0), (y - y_0))$ – вектор, лежащий на прямой. Так как скалярное произведение равно нулю, то $\vec{N} \perp \vec{M_0 M}$, т.е.

$\vec{N} = (A, B)$ перпендикулярен прямой, ч. т. д.

Теорема: Уравнение прямой, проходящей через две точки

$$M_1 = (x_1, y_1), \quad M_2 = (x_2, y_2) \text{ имеет вид: } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство фактически проведено в п. 2 (пункте 2) первой теоремы о том, что $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ есть уравнение прямой.

Параметрическое уравнение прямой имеет вид: $\begin{cases} x = x_0 + l_x \cdot t \\ y = y_0 + l_y \cdot t \end{cases}$, где

(x_0, y_0) – фиксированная точка прямой, а вектор $\vec{l} = (l_x, l_y)$ – направляющий вектор прямой (он параллелен прямой). В векторном виде параметрическое

уравнение прямой имеет вид: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix} t$ или: $\vec{M} = \vec{M_0} + \vec{l} \cdot t$ или

$\vec{M_0 M} = \vec{M} - \vec{M_0} = \vec{l} \cdot t$ или $\vec{M_0 M}$ параллелен $\vec{l}$.

Другая форма этого же уравнения имеет вид: $\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y} (= t)$.

Использовать эту форму уравнения менее удобно, так как в том случае следует анализировать случаи равенства нулю компонент направляющего вектора l_x или l_y .

Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с направляющим вектором $\vec{l} = (l_x, l_y)$ можно также записать в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l_x & l_y \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2. Плоскости и прямые в пространстве

1. Плоскости в пространстве

Теорема. Точки $\vec{M} = (x, y, z)$ лежат на плоскости в том и только в том случае, когда они удовлетворяют уравнению $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$, где четвёрка чисел (A, B, C, D) определена с точностью до коэффициента пропорциональности т. е. числа: (A, B, C, D) и (kA, kB, kC, kD) определяют одну и ту же плоскость.

Доказательство проводится аналогично случаю прямой линии, проходящей через две точки. Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$, где $M = (x, y)$ – произвольная

точка плоскости, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно

векторам $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Очевидно, объём параллелограмма, натянутого на компланарные (лежащие в одной плоскости) вектора

$\vec{M_0M} = \vec{M} - \vec{M_0} = (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = ((x - x_0), (y - y_0), (z - z_0))$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен нулю.

Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) с заданным вектором нормали $\vec{N} = (A, B, C)$, имеет вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Доказательство проходит аналогично случаю уравнения прямой на плоскости с заданной нормалью: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Параметрическое уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x u + b_x v \\ y = y_0 + a_y u + b_y v \\ z = z_0 + a_z u + b_z v \end{cases}$$

Суть дела в данном случае состоит в том, что вектор $\vec{M_0M}$, лежащий в плоскости, разлагается по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, параллельным плоскости, как по базисным векторам

2. Прямая в пространстве.

Уравнение прямой в пространстве может быть задано разными способами.

1. Прямая как пересечение двух плоскостей задаётся системой

уравнений:
$$\begin{cases} A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \\ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \end{cases}$$
 . При этом направляющий

вектор прямой может быть задан как векторное произведение нормалей этих плоскостей, а именно:

$$\vec{l} = (\vec{N}_1 \times \vec{N}_2) = ((A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Точка (x_0, y_0, z_0) является каким-либо частным решением указанной системы уравнений. Решив эту систему уравнений каким-нибудь стандартным способом, например, методом Жордана-Гаусса, можно получить общее решение указанной системы в параметрическом виде.

2. Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $\vec{M}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ с заданным направляющим вектором $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$

(параллельным прямой) имеет вид:
$$\begin{cases} x = x_0 + l_x \cdot t \\ y = y_0 + l_y \cdot t \\ z = z_0 + l_z \cdot t \end{cases} . \text{ Доказательство}$$

аналогично случаю параметрического уравнения прямой на плоскости. В векторном виде это уравнение имеет вид: $\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{l} \cdot t$,

где $\vec{M} = (x, y, z)$. Аналогично случаю прямой на плоскости параметрическое уравнение прямой может быть также записано в

виде:
$$\frac{x - x_0}{l_x} = \frac{y - y_0}{l_y} = \frac{z - z_0}{l_z} (= t).$$

3. Несколько полезных формул.

Ориентированное расстояние от точки до прямой на плоскости даётся

формулой:
$$d = \frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$
 где $\vec{M}_0 = (x_0, y_0)$ – точка,

от которой меряется расстояние, $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ – уравнение прямой на плоскости. Если расстояния от двух точек до заданной прямой – разных знаков, это означает, что эти точки расположены по разные стороны от прямой.

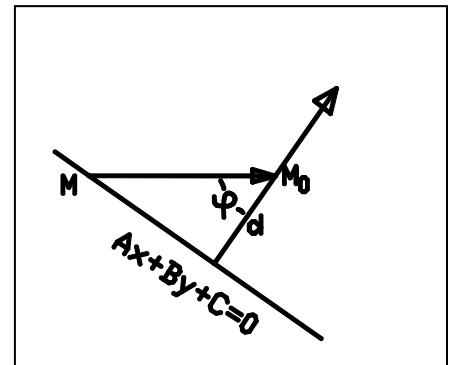
Ориентированное расстояние от точки до плоскости в пространстве даётся аналогичной формулой:

$$d = \frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$
 где $\vec{M}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ точка, от

которой меряется расстояние, $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ – уравнение плоскости.

Доказательство следует из рисунка. Имеем:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\vec{MM}_0| \cdot |\vec{N}| \cdot \cos(\varphi)}{|\vec{N}|} = \frac{(\vec{MM}_0 \cdot \vec{N})}{|\vec{N}|} = \frac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 - (Ax + By)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 - (-C)}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ поскольку } Ax + By + C = 0 \text{ и } Ax + By = -C, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$



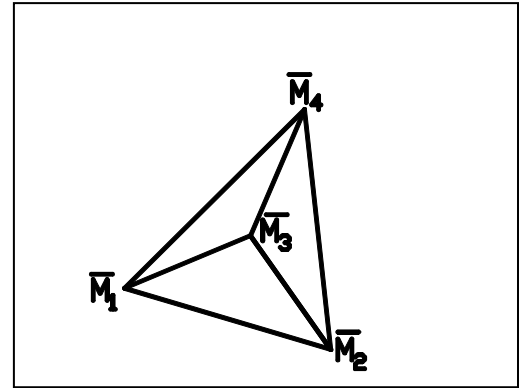
Ориентированная площадь треугольника на плоскости с вершинами в точках:

$\vec{M}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{M}_2 = (x_2, y_2)$, $\vec{M}_3 = (x_3, y_3)$ даётся

формулой $S = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, где $2! = 1 \cdot 2$.

Ориентированный объём тетраэдра в пространстве

даётся аналогичной формулой: $V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$.



Здесь: $\vec{M}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{M}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{M}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $\vec{M}_4 = (x_4, y_4, z_4)$ – вершины тетраэдра.

Полезно знать также формулы Герона ($n = 2$) и Никколо Тарталья ($n = 3$):

$$V = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{12}^2 & l_{13}^2 \\ 1 & l_{21}^2 & 0 & l_{23}^2 \\ 1 & l_{31}^2 & l_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}}$$
, где $l_{ij} = |\vec{M}_i - \vec{M}_j|$ – длины рёбер тетраэдра.

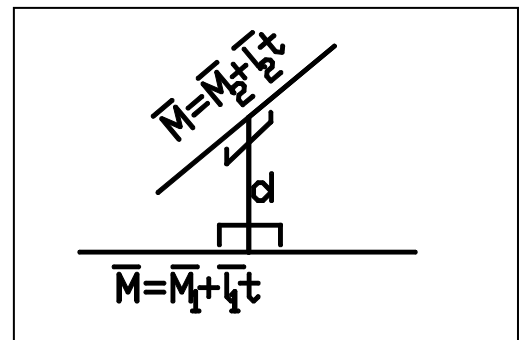
Данная формула соответствует формуле Герона.

Расстояние между двумя скрещивающимися

прямыми: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{l}_1 \cdot t$ и $\vec{M} = \vec{M}_2 + \vec{l}_2 \cdot t$

даётся формулой: $\hat{a} = \frac{\det((\vec{M}_2 - \vec{M}_1), \vec{l}_1, \vec{l}_2)}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|}$, где в

числителе – смешанное произведение, а в знаменателе – модуль векторного произведения.



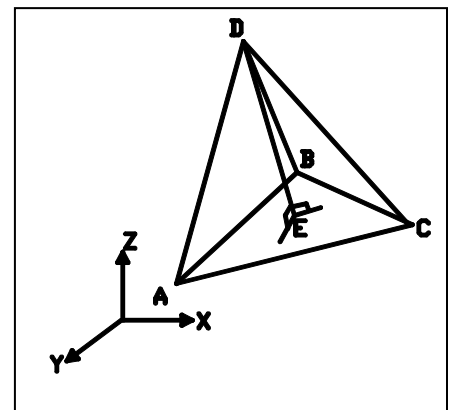
§ 3. Программа вычисления объёма тетраэдра.

1. Вычисление объёма тетраэдра.

Задача. В пространстве дан тетраэдр (треугольная пирамида) координатами своих вершин:

$A(-4, -3, 4)$; $B(5, 7, 3)$; $C(5, 5, 5)$; $D(8, -3, -2)$. Найти основание перпендикуляра DE , опущенного из точки D на плоскость ABC , его длину (высоту тетраэдра) $h = |\vec{DE}|$ с проверкой

значения этой высоты по формуле расстояния от точки до плоскости. Найти площадь треугольника ABC (основания тетраэдра) и объём тетраэдра как одна третья произведения площади основания на высоту. Проверить величину объёма



по формуле для объёма тетраэдра как одной шестой абсолютной величины определителя четвёртого порядка.

Решение. Задача во многом аналогична предыдущей. Уравнение плоскости ABC

Имеет вид:
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -4 & -3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -4 & -3 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & -1 & 0 \\ 9 & 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 10 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 9 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 9 & 10 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 \\ 9 & 10 & -1 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 18x - 18y - 18z - \begin{vmatrix} 32 & 37 & 0 \\ 9 & 10 & -1 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

Разлагая последний определитель по правому столбцу, получаем уравнение плоскости ABC : $18x - 18y - 18z + 18 \cdot 5 = 0$ или, окончательно после сокращения на 18: $x - y - z + 5 = 0$. Проверка правильности вычислений выполняется подстановкой точек плоскости A, B и C : $A(-4, -3, 4)$: $-4 + 3 - 4 + 5 = 0$, далее: $B(5, 7, 3)$: $5 - 7 - 3 + 5 = 0$ и $C(5, 5, 5)$: $5 - 5 - 5 + 5 = 0$.

Напомним, что нормаль (перпендикуляр) к плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$ есть вектор: $\vec{N} = (A, B, C)$. В данном случае: $\vec{N} = (1, -1, -1)$. Основание перпендикуляра DE (точка D) ищется аналогично предыдущей задаче.

Параметрическое уравнение перпендикуляра: $\vec{M} = \vec{D} + \vec{N} \cdot t$ или:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t. \text{ Подставляем это в уравнение плоскости } ABC:$$

$(8+t) - (-3-t) - (-2-t) + 5 = 0$ или: $18 + 3t = 0$, отсюда: $t = t_E = -6$. Подставляя это значение параметра в параметрическое уравнение нормали, получаем координаты точки основания перпендикуляра: $x_E = 8 - 6 = 2$; $y_E = -3 + 6 = 3$ и $z_E = -2 + 6 = 4$. Итак: $E = (2, 3, 4)$.

Отсюда получаем значение высоты:

$$h = |\vec{DE}| = |\vec{E} - \vec{D}| = |(2, 3, 4) - (8, -3, -2)| = |(-6, 6, 6)| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

Проверка значения высоты проводится по формуле расстояния от точки до плоскости:

$$h = \frac{|A \cdot x_D + B \cdot y_D + C \cdot z_D + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 8 + (-1) \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$$

Площадь основания треугольника ABC ищем по формуле половины модуля векторного произведения векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Имеем: $\vec{AB} = \overrightarrow{\text{конец}_{AB} - \text{начало}_{AB}} = \vec{B} - \vec{A} = (5, 7, 3) - (-4, -3, 4) = (9, 10, -1)$.

Аналогично: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (5, 5, 4) - (-4, -3, 4) = (9, 8, 1)$. Далее вычисляем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 10 & -1 \\ 9 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 18\vec{i} - 18\vec{j} - 18\vec{k} = 18 \cdot (1, -1, -1).$$

$$\text{Отсюда: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 9\sqrt{3}.$$

$$\text{Объём тетраэдра имеет значение: } V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 54.$$

Проверка по формуле объёма тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 1 \\ 8 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -4 & -3 & 4 & 1 \\ 9 & 10 & -1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 7 & 10 & -1 \\ 11 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot |56 - 110| = 54.$$

Ниже даётся описание и текст программы на языке Maple версии 9.01, вычисляющей объём тетраэдра двумя способами. Фактически, в данном случае происходит численная проверка соответствующих формул аналитической геометрии. Эту программу рекомендуется использовать для учебных целей при обучении пользования этим формулам.

2. Описание алгоритма.

Вначале на основании заданного центра тяжести $\overrightarrow{mp}$ основания тетраэдра ABC и заданных векторов $\overrightarrow{l1} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{mp}$, $\overrightarrow{l2} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{mp}$ вычисляются вершины $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ и $\overrightarrow{C}$ основания тетраэдра: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{mp} - \overrightarrow{l1} - \overrightarrow{l2}$. $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{mp} + \overrightarrow{l1}$, $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{mp} + \overrightarrow{l2}$. Затем вычисляются численно-аналитическим способом матрица векторного произведения $\overrightarrow{l1} \times \overrightarrow{l2}$ и само это векторное произведение как определитель этой матрицы. Вектор $\overrightarrow{l3}$ есть также $\overrightarrow{l1} \times \overrightarrow{l2}$, но в трёхкомпонентном виде. Затем вычисляется четвёртая вершина тетраэдра по формуле: $\overrightarrow{DD} = \overrightarrow{mp} + \overrightarrow{l1} \times \overrightarrow{l2}$ (обозначение D для четвёртой вершины тетраэдра использовать нельзя, так как оно зарезервировано Mapl'ом для других целей). Указанный алгоритм вычисления вершин тетраэдра даёт возможность вычислять тестовые вершины тетраэдром для самостоятельной работы с формулами при сравнительно простых промежуточных вычислениях.

Задача вычисления объёма тетраэдра – самопроверяемая, поскольку вычисление объёма тетраэдра производится двумя способами. Первый способ – по «школьной» формуле – как одна треть произведения площади основания на высоту. Второй способ – через одну шестую абсолютной величины (модуля) некоторого определителя четвёртого порядка, составленного из координат четырёх вершин тетраэдра.

По первому способу вычисляется уравнение плоскости основания в виде: $A1 \cdot x + B1 \cdot y + C1 \cdot z + D1 = 0$ через уравнение плоскости по трём точкам A, B, C , использующее определитель четвёртого порядка, составленный из координат

этих вершин. Вектор $\overrightarrow{vh} = (A1, B1, C1)$ есть вектор нормали (перпендикуляр) к плоскости ABC основания тетраэдра. Параметрическое уравнение прямой этой нормали, проходящее через вершину DD , есть $\overrightarrow{Mh} = \overrightarrow{DD} + \overrightarrow{vh} \cdot t$. Далее, ищется точка E пересечения этой прямой с плоскостью основания тетраэдра. Подставляя координаты этой нормали в уравнение плоскости ABC , получаем уравнение $Mht = cht1 \cdot t + cht0 = 0$ для определения параметра пересечения $t = tp$ нормали с плоскостью ABC . Очевидно: $tp = -\frac{cht0}{cht1}$ и $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{DD} + \overrightarrow{vh} \cdot tp$.

Ищем, далее, площадь основания ABC . Для этого вычисляем матрицу ms и её определитель fs векторного произведения $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ и трёхкомпонентную форму $\overrightarrow{ls} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ этого произведения. Тогда площадь основания тетраэдра s (площадь треугольника ABC) есть половина модуля этого вектора: $s = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{ls}|$.

Затем вычисляем вектор высоты тетраэдра $\overrightarrow{lh} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{DD}$, его модуль $h = |\overrightarrow{lh}|$, а также расстояние от вершины DD до плоскости основания тетраэдра ABC . Очевидно, высота тетраэдра равна: $h = h1$ (ещё одна проверка для правильного вычисления высоты).

Наконец, вычисляем объём тетраэдра первым способом по «школьной» формуле: $v = \frac{1}{3} \cdot s \cdot h$ и вторым способом как одну шестую часть определителя четвёртого порядка, составленного из координат вершин тетраэдра A, B, C и DD .

3. Имена величин и подпрограмм, используемые в программе.

tp – центр тяжести основания тетраэдра (исходная величина).

$l1$ и $l2$ – вектора, соединяющие центр тяжести tp и вершины B и C основания ABC тетраэдра (исходные величины).

$l3 = DD - tp$ – векторное произведение $\overrightarrow{l1} \times \overrightarrow{l2}$ в трёхкомпонентной форме.

$plan, p1$ – матрица и её определитель четвёртого порядка в уравнении плоскости, проходящей через три точки.

vh – вектор нормали (перпендикуляра) к плоскости ABC основания тетраэдра в трёхкомпонентной форме.

Mh – правая часть векторного параметрического уравнения прямой, параллельной нормали и проходящей через вершину DD .
 $Mh = cht1 \cdot t + cht0$.

tp – параметр, соответствующий точке пересечения этой прямой Mh с плоскостью ABC (основание перпендикуляра, опущенного из вершины DD на плоскость ABC).

ms, fs – матрица и её определитель для векторного произведения $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$ls = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ – векторное произведение в трёхкомпонентной форме.

s – площадь треугольника ABC как половина модуля векторного произведения $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$.

$lh = E - DD$ – трёхкомпонентная форма вектора высоты тетраэдра.

$h = |lh|$ – длина высоты тетраэдра.

$h1$ – длина высоты тетраэдра, полученная по формуле расстояния от вершины DD до плоскости ABC основания тетраэдра. Очевидно, что $h = h1$ (способ проверки правильности вычислений).

mv, dv – матрица и её определитель четвёртого порядка в формуле вычисления объёма по второму способу (как $\frac{1}{6}$ часть модуля этого определителя).

$v1, v2$ – объёмы тетраэдра, полученные первым и вторым способами. Очевидно (проверка), что $v1 = v2$.

4. Текст программы вычисления объёма тетраэдра.

```
> restart;
with(LinearAlgebra):
#9;mp:=<2| 3| 4>;l1:=<3| 4| -1>;l2:=<3| 2| 1>;
#-----subprog-----
sub := proc( ) global
A,B,C,DD,m, fm, l1, l2, l3, plan, pl, A1, B1, C1, D1, vh, Mh, Mht, cht0
, cht1, tp, E, AB, AC, ms, fs, ls, s, lh, h, r1, r2, h1, mv, dv, v1, v2;
A:=mp-l1-l2;B:=mp+l1;C:=mp+l2;
m:=<<i | j | k>, <l1[1] | l1[2] | l1[3]>, <l2[1] | l2[2]
| l2[3]>>;fm:=Determinant(m);
l3:=<coeff(fm,i)| coeff(fm,j)| coeff(fm,k)>;
DD:=mp+l3;plan:=<<x | y | z | t>, <A[1] | A[2] | A[3] |
1>, <B[1] | B[2] | B[3] | 1>,
<C[1] | C[2] | C[3] |
1>>;pl:=Determinant(plan);A1:=coeff(pl,x);B1:=coeff(pl,y)
;C1:=coeff(pl,z);
D1:=coeff(pl,t);vh:=<A1| B1| C1>;
Mh:=DD+vh*t;Mht:=A1*Mh[1]+B1*Mh[2]+C1*Mh[3]+D1;
cht1:=coeff(Mht,t); cht0:=Mht-cht1*t;tp:=-
cht0/cht1;E:=DD+vh*tp;
AB:=B-A;AC:=C-A;ms:=<<i | j | k>, <AB[1] | AB[2] |
AB[3]>, <AC[1] | AC[2] | AC[3]>>;
fs:=Determinant(ms);ls:=<coeff(fs,i)| coeff(fs,j)|
coeff(fs,k)>;s:=(1/2)*sqrt(ls[1]^2+ls[2]^2+ls[3]^2);
lh:=E-
DD;h:=sqrt(lh[1]^2+lh[2]^2+lh[3]^2);r1:=abs(A1*DD[1]+B1*D
D[2]+C1*DD[3]+D1);r2:=sqrt(A1^2+B1^2+C1^2);
h1:=r1/r2;
mv:=<<A[1] | A[2] | A[3] | 1>,<B[1] | B[2] |
B[3]|1>,<C[1]| C[2]|C[3]|1>,<DD[1]| DD[2] | DD[3] | 1>>;
dv:=Determinant(mv); v1:=(1/3)*s*h; v2:=(1/6)*abs(dv);
end proc;
```

```

#9-----
9;mp:=<2| 3| 4>;l1:=<3| 4| -1>;l2:=<3| 2| 1>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#1-----
1;mp:=<1| 2| 3>;l1:=<3| 2| -1>;l2:=<3| 1| 2>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#2-----
2;mp:=<3| 4| 5>;l1:=<4| 3| -1>;l2:=<3| 1| 2>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#3-----
3;mp:=<2| 4| 3>;l1:=<3| -1| 4>;l2:=<3| 2| 1>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#4-----
4;mp:=<2| 3| 4>;l1:=<2| 3| -1>;l2:=<3| 1| 2>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#5-----
5;mp:=<4| 3| 2>;l1:=<2| 3| -1>;l2:=<3| 4| 1>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#6-----
6;mp:=<4| 2| 3>;l1:=<3| 2| -1>;l2:=<3| 2| 1>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#7-----
7;mp:=<2| 5| 4>;l1:=<2| 4| -1>;l2:=<1| 2| 3>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;
#8-----
8;mp:=<2| 3| 5>;l1:=<3| 2| -1>;l2:=<2| 3| 1>;
sub();A:=A;B:=B;C:=C;DD:=DD;l3:=l3;p1:=p1;E:=E;ms:=ms;fs:
=fs;s:=s;h:=h;h1:=h1;v1:=v1;v2:=v2;

```

9

$$mp := [2, 3, 4]$$

$$l1 := [3, 4, -1]$$

$$l2 := [3, 2, 1]$$

54

$$A := [-4, -3, 4]$$

$$B := [5, 7, 3]$$

$$C := [5, 5, 5]$$

$$DD := [8, -3, -2]$$

$$\begin{aligned}
l3 &:= [6, -6, -6] \\
pl &:= 18x - 18y + 90t - 18z \\
E &:= [2, 3, 4] \\
ms &:= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 9 & 10 & -1 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \\
fs &:= 18i - 18k - 18j \\
s &:= 9\sqrt{3} \\
h &:= 6\sqrt{3} \\
h1 &:= 6\sqrt{3} \\
v1 &:= 54 \\
v2 &:= 54
\end{aligned}$$

§ 4. Матрицы и алгебра матриц.

1. Определение.

Прямоугольная матрица есть прямоугольная таблица объектов (как правило, чисел), состоящая из m строк и n столбцов. Для матриц определены операции сложения и умножения на число а также операция умножения матрицы на матрицу (при условии, что количество столбцов левого сомножителя совпадает с количеством строк правого сомножителя). Эти операции производятся в соответствии со следующими правилами.

1. Элемент a_{ij} матрицы, равной сумме двух матриц, расположенный на пересечении её i -ой строки и j -ого столбца равен сумме соответствующих элементов матриц – слагаемых. Аналогично, чтобы помножить матрицу на число, нужно каждый её элемент помножить на число, что, в частности, согласуется с суммой двух одинаковых матриц.
2. Элемент a_{ij} произведения двух матриц есть скалярное произведение i -ой строки левого сомножителя на j -ый столбец правого сомножителя.

Пример 1:
$$2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - b_{11} & 2a_{12} - b_{12} \\ 2a_{21} - b_{21} & 2a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}.$$

Пример 2:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

В частности, скалярное произведение двух векторов можно рассматривать как матричное произведение вектора – строки на вектор – столбец.

2. Кольцо матриц.

Относительно сложения, умножения на число (матричные операции) и относительно умножения матриц квадратные матрицы образуют кольцо.

Определение. Кольцо есть множество алгебраических объектов с двумя операциями – сложением и умножением, удовлетворяющих следующим правилам (аксиомам) кольца.

1. Кольцо есть коммутативная (абелева) группа относительно сложения, предусматривающая коммутативность, ассоциативность, существование нуля и обратного элемента.
2. Относительно умножения в кольце справедливы закон ассоциативности: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ и две дистрибутивности: (1) $(A + B)C = AC + BC$ и (2) $A(B + C) = AB + AC$.

Что касается коммутативности, то в кольце матриц это правило, вообще говоря,

неверно: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, однако: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Если

правила действий над матрицами как таблицами чисел определяются по правилу строка на столбец, указанные правила необходимо доказывать или проверять вычислением. При абстрактном определении матриц как неких объектов с заданными правилами (1) и (2) эти правила являются аксиомами, то есть истинами, не требующими доказательства.

Определение. Транспонированием матрицы (обозначение A^*) называется операция поворота плоскости матрицы вокруг её главной диагонали (на ней

находятся элементы a_{11} и a_{22} (a_{ii}) на 180° : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Теорема. $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$ (проверяется вычислением).

Определение: единичной матрицей называется квадратная матрица вида:

«1» = $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (элементы матрицы a_{ij} равны единице, если $i = j$ и нулю,

если $i \neq j$, т.е. на главной диагонали расположены единицы, остальные элементы матрицы равны нулю).

Теорема: $A \cdot E = E \cdot A = A$ (проверяется вычислением).

Теорема: Для каждой невырожденной квадратной матрицы (т.е. у которой определитель отличен от нуля) существует обратная матрица (обозначение: A^{-1}) такая, что:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Вычисление обратной матрицы производится по следующему алгоритму.

1. Для данной матрицы A строим матрицы миноров M . Минор M_{ij} для элемента a_{ij} матрицы A есть определитель матрицы, полученной из A вычёркиванием строки i и столбца j , на пересечении которых находится элемент a_{ij} .

2. Элементы матрицы миноров меняют знак в соответствии с «шахматным» правилом: $Ad_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot a_{ij}$, где Ad_{ij} элемент матрицы адьюнктов Ad .
3. Полученную матрицу Ad транспонируем.
4. Матрицу Ad^* делим на определитель исходной матрицы (т.е. делим каждый её элемент) $|A| = \det(A)$, и в результате получаем обратную матрицу: $A^{-1} = Ad^* / |A|$.

Доказательство. $Ad = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$, поскольку элемент главной диагонали

Ad_{ii} есть разложение определителя $|A|$ по строке i . Остальные элементы матрицы Ad равны нулю как разложения определителя матрицы с одинаковыми строками.

3. Преобразования координат.

Подвергнем декартову ортогональную сетку (прямых $x = const$ и $y = const$) в декартовом базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ линейному преобразованию (деформации) f , т.е. выполним линейную операцию: $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = f(x)\vec{i} + f(y)\vec{j}$.

Напомним свойство линейности: $f(k\vec{a} + l\vec{b}) = k \cdot f(\vec{a}) + l \cdot f(\vec{b})$. При этом прямые линии переходят в прямые линии, и отношение параллельных или находящихся на одной прямой отрезков сохраняется. Линейное преобразование на плоскости определяется линейным преобразованием векторов базиса по формуле:

$$\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} \text{ или: } \begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j} \\ \vec{f}_2 = a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} \end{cases}. \text{ Тогда вектор } x\vec{i} + y\vec{j} \text{ перейдёт в}$$

вектор

$$x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 = x(a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j}) + y(a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j}) = (xa_{11} + ya_{21})\vec{i} + (xa_{12} + ya_{22})\vec{j} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\text{или в матричном виде: } (x_1, y_1) = (x, y)A = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Транспонируя последнее равенство и используя теорему: $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$,

$$\text{получаем: } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^* \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \text{ Нетрудно видеть, что при}$$

проведении последовательных преобразований с матрицами B и A результирующее преобразование будет с матрицей $A \cdot B$. Действительно, если $\vec{r}_1 = B\vec{r}$ и $\vec{r}_2 = A\vec{r}_1$, то $\vec{r}_2 = A(B\vec{r}) = AB\vec{r}$.

Ниже даются примеры различных аффинных (линейных) преобразований плоскости.

1. $A_{kx} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – расширение координатной сетки вдоль оси ОХ в k раз.
2. $A_{ky} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ – расширение координатной сетки вдоль оси ОУ в k раз.
3. $A_{kk} = A_{kx} \cdot A_{ky}$ – преобразование подобия (точнее, гомотетии) в k раз.
4. $A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ – поворот сетки вокруг начала координат на угол φ .
5. $A_{\Gamma k} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ – гиперболический поворот (сжатие в k раз вдоль оси ОУ и расширение в k раз вдоль оси ОХ).
6. $A_{Ck} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ – скос (в частности, параболический поворот вдоль

параболы $x = y^2$). В самом деле, при преобразовании:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 \\ k \end{pmatrix} = A_{C2k}^* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 \\ k \end{pmatrix}$$

равенство $x_1 = y_1^2$, т.е. при этом преобразовании точка движется по параболе при изменении k .

Очевидно, что эти преобразования образуют подгруппы группы аффинных преобразований плоскости, сохраняющие начало координат а также переводящие прямые линии в прямые линии. Кроме того, при аффинных преобразованиях сохраняется простое отношение между тремя точками на

прямой линии: $(M_1 M_2 M) = \frac{\overrightarrow{M_1 M}}{\overrightarrow{M_2 M}} = k$ (при условии, что $\overrightarrow{M_1 M} = k \overrightarrow{M_2 M}$, см.

деление коллинеарных векторов).

Напомним, что множество преобразований образует группу, если произведение преобразований ассоциативно (но, вообще говоря, не коммутативно) существует единичное (тождественное) преобразование, и существует для каждого преобразования обратное ему преобразование.

4. Геометрия как теория инвариантов группы преобразований.

В 1870 году Ф. Клейн (немецкий математик) сформулировал точку зрения на геометрию как на науку, изучающую инварианты (т.е. не меняющиеся величины) при заданной группе преобразований, каковыми являются размеры жёстких фигур, т.е. длины отрезков, и углы между отрезками и, следовательно, скалярные произведения между векторами. Нетрудно видеть, что эти преобразования задаются ортогональной матрицей, которая по определению обладает тем свойством, что её строки и столбцы, рассматриваемые как вектора,

являются ортогональными и нормированными, т.е.

$$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \text{ это есть нормированность} \\ 0 & \text{при } i \neq j, \text{ это есть ортогональность} \end{cases}.$$

Пример использования подхода Клейна.

Задача. Доказать, что середины параллельных отрезков, отсекаемых от

параллельных прямых графиком функции $y = \frac{1}{x}$ (гиперболой), лежат на одной

прямой,
проходящей через
начало координат.

Решение.

Гиперболическим
поворотом сводим
эту задачу к
очевидному
частному случаю,
когда направление
параллельных
прямых образует с

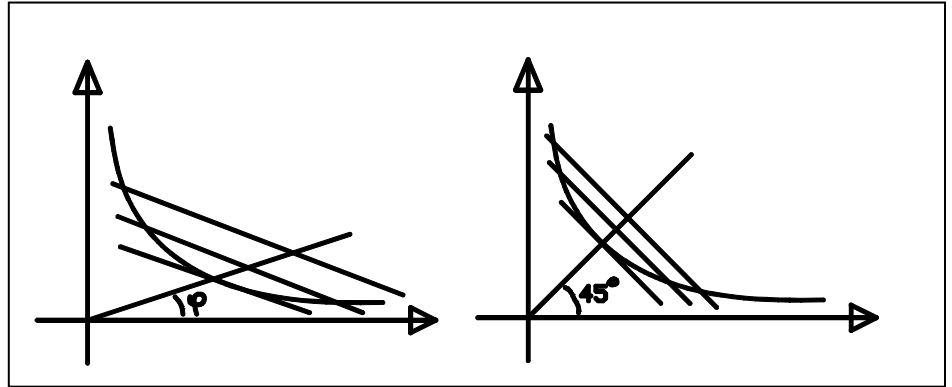
осями координат углы, кратные 45° .

Задача. Решить аналогичную задачу для эллипса, уравнение которого:

$$x^2 + (k \cdot y)^2 = 1.$$

Задача. Доказать, что площадь фигуры, представляющей собой часть параболы, отсечённой прямой линией, равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника, образованного секущей и двумя прямыми, касательными к параболе в точках её пересечения с секущей.

Указание: использовать скос (параболический поворот).



§ 4. Линейные представления комплексных чисел.

Алгебра в узком смысле есть векторное пространство, в котором определена операция умножения над векторами базиса. В «хорошей» алгебре над её элементами-векторами необходимо уметь делать все действия, что и в поле (т.е. абелевой группе относительно сложения и умножения) действительных чисел. К сожалению (теорема Фробениуса) имеются только три «хорошие» алгебры: поле действительных чисел, поле комплексных чисел и тело кватернионов (тело хуже поля в том смысле, что там умножение некоммутативно). Поле комплексных чисел лучше поля действительных чисел потому, что имеется большая возможность производить различные операции над числами. Например, из комплексного числа можно неограниченно извлекать корни, тогда как в поле действительных чисел $\sqrt{-1}$ не существует.

1. Комплексные числа.

Определение. Комплексные числа определяются как формальные выражения вида: $a + b \cdot i = a + b \cdot \sqrt{-1}$, где a и b – действительные или вещественные числа, к которым мы привыкли в школьном возрасте, а $i = \sqrt{-1}$ есть некая воображаемая «мнимая» единица, обладающая свойством $i \cdot i = i^2 = -1$, причём с этими числами можно выполнять арифметические операции по следующим правилам:

- 1) сложение (вычитание) выполняется так:

$$(a + b\sqrt{-1}) \pm (c + d\sqrt{-1}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{-1};$$
- 2) умножение выполняется так:

$$(a + b\sqrt{-1}) \cdot (c + d\sqrt{-1}) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\sqrt{-1};$$
- 3) деление выполняется так:

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})}{(c + d\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})} = \left(\frac{a \cdot c + b \cdot d}{c^2 + d^2} \right) + \left(\frac{b \cdot c - a \cdot d}{c^2 + d^2} \right) \sqrt{-1}.$$

Отсюда видно, что действия с комплексными числами выполняются так же как с обычными многочленами первой степени вида: $a + b \cdot x$ с учётом того, что $x^2 = -1$.

Чтобы выражение $\sqrt{-1}$ не вызывало недоумённые вопросы, говорят, что поле комплексных чисел вида $a + bi$ изоморфно полю матриц вида:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$
 т.е. между комплексными числами и соответствующими квадратными матрицами имеется взаимно-однозначное соответствие с сохранением операций. Например, $i \cdot i = -1$ соответствует следующее умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)(I)$$

В дальнейшем выражение «мнимая» единица будем употреблять без кавычек, и вместо $\sqrt{-1}$ будем писать i (в электротехнике мнимую единицу обозначают буквой j , поскольку буква i там зарезервирована для обозначения силы тока).

Таким образом, линейное представление алгебры есть её матричная модель. Аналогично тело кватернионов вида: $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$ изоморфно

телу комплексных матриц вида: $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$

Следует заметить, что векторное произведение исторически выросло из формулы произведения чисто мнимых кватернионов:

$\{a\}\{b\} = (a_x i + a_y j + a_z k)(b_x i + b_y j + b_z k) = -(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{b})$, где слева – произведение чисто мнимых кватернионов, справа – кватернион, действительная часть которого – скалярное произведение двух векторов, взятая с отрицательным знаком (т. е. $-(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$), а мнимая часть по форме совпадает с

векторным произведением: $(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$. Отличие состоит в том, что в

данном случае i, j и k – мнимые единицы, а не единичные ортогональные вектора.

2. Формула Эйлера.

Теорема (Л. Эйлер): $e^{\varphi i} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$.

Для понимания этой теоремы прежде всего необходимо определить возведение числа в мнимую степень. Для этого используем

Постулат: $e = 2.7182918... = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z$.

При вещественном z и при $z \rightarrow \infty$ или $z \rightarrow -\infty$ существование указанного предела доказывается в курсах математического анализа (теории пределов). Мы постулируем (т.е. принимаем за аксиому) что при любом комплексном $z = x + y \cdot i$ и при $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ предел будет тот же самый. Тем самым, как мы увидим ниже, мы, фактически, определяем возведение числа в мнимую (комплексную) степень.

Следствие. $e^{\varphi i} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi \cdot i}{n}\right)^n$. Доказательство.

$$e^{\varphi i} = \left[\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \right]^{\varphi i} = \lim_{|z \cdot \varphi \cdot i| = |n| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi \cdot i}{z \cdot \varphi \cdot i}\right)^{z \cdot \varphi \cdot i} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi \cdot i}{n}\right)^n, \text{ ч.т.д.}$$

Доказательство (геометрическое) формулы Эйлера.

1. Поле комплексных чисел изоморфно векторному пространству на плоскости относительно операций сложения и вычитания. Сущность изоморфизма состоит в том, что арифметическая операция коммутирует (перестановочна) с операцией φ изоморфного отображения.

Иначе, если $\varphi(z) = \varphi(x + i \cdot y) = (\overline{x}, y)$, то

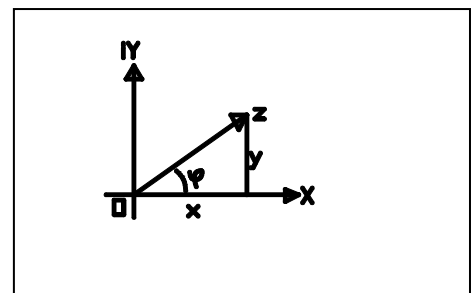
$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi((z_1, z_2)) = +(\varphi(z_1, z_2)) = +(\overline{z_1}, z_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

2. $z = x + y \cdot i = |z|(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и

$$\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right). \text{ Это следует из рассмотрения треугольника}$$

с катетами x, y и с гипотенузой $|z|$.

3. Формула Муавра-Лапласа:
 $(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \cdot (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) =$



$$= (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Для доказательства этой формулы следует помножить два комплексных числа в левой части равенства и воспользоваться формулами косинуса и синуса суммы двух углов.

4. Следствие: $z^n = (|z|(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)))^n = |z|^n (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)).$

5. Для $z = 1 + \frac{\varphi \cdot i}{n}$ имеем: $|z| = \sqrt{1 + \frac{\varphi^2}{n^2}} = \left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\varphi = \arctg\left(\frac{\varphi}{n}\right).$

$$\begin{aligned} 6. \quad e^{\varphi i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\varphi \cdot i}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|1 + \frac{\varphi \cdot i}{n}\right|^n \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{\varphi^2}} \right]^{\frac{\varphi^2 n}{n^2 \cdot 2}} \times \left(\cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \arctg \frac{\varphi}{n} \right) \right) + i \cdot \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \arctg \frac{\varphi}{n} \right) \right) \right) = \\ &= e^{\frac{\varphi^2}{2 \cdot \infty}} \left(\cos \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varphi \cdot \frac{\arctg \frac{\varphi}{n}}{\left(\frac{\varphi}{n}\right)} \right) \right) + i \cdot \sin \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varphi \cdot \frac{\arctg \frac{\varphi}{n}}{\left(\frac{\varphi}{n}\right)} \right) \right) \right) = e^0 (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = \\ &= \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi), \quad \text{ч. м. д.} \end{aligned}$$

Геометрически приведённое доказательство может интерпретироваться как разбиение угла φ на n равных частей, причём

$$\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \right)^n.$$

С точки зрения линейного (матричного) представления комплексных чисел число $e^{\varphi i}$ осуществляет поворот координатной сетки на угол φ вокруг начала координат, поскольку:

$$e^{\varphi i} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi) = \cos(\varphi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\varphi) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \text{ Иначе}$$

говоря, умножить радиус-вектор $x + y \cdot i$ на комплексное число $e^{\varphi i}$ значит повернуть этот вектор на угол φ . В частности, поскольку

$$e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i, \text{ то умножение комплексного числа на мнимую}$$

единицу означает поворот соответствующего вектора на $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Действительно:

$$(x + i \cdot y) \cdot i = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 0 + (-y) \cdot 1 & x \cdot (-1) + (-y) \cdot 0 \\ y \cdot 0 + x \cdot 1 & y \cdot (-1) + x \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y & -x \\ x & -y \end{pmatrix} = (-y + i \cdot x)$$

есть поворот вектора – комплексного числа на 90° .

Оглавление гл. 2.

Гл. 2.	Аналитическая геометрия прямых и плоскостей.	20
Введение.		20
§ 1.	Прямые на плоскости.	20
§ 2.	Плоскости и прямые в пространстве.	22
1.	Плоскости в пространстве.	22
2.	Прямая в пространстве.	22
3.	Несколько полезных формул.	23
§ 3.	Программа вычисления объёма тетраэдра.	24
1.	Вычисление объёма тетраэдра.	24
2.	Описание алгоритма.	26
3.	Имена величин и подпрограмм, используемые в программе.	27
4.	Текст программы вычисления объёма тетраэдра.	28
§ 4.	Матрицы и алгебра матриц.	30
1.	Определение.	30
2.	Кольцо матриц.	31
3.	Преобразования координат.	32
4.	Геометрия как теория инвариантов группы преобразований.	33
§ 4.	Линейные представления комплексных чисел.	34
1.	Комплексные числа.	35
2.	Формула Эйлера.	36

Гл. 3. Теория кривых и поверхностей второго порядка.

Введение.

Определение. Кривой второго порядка на плоскости называется кривая, уравнение которой имеет вид многочлена от переменных x, y (координат точки), у которого степень одночленов вида: $a \cdot x^i y^j$ не выше второй, т.е. $i + j \leq 2$. Уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ или в матричном виде:

$$(x, \quad y, \quad 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ причём матрица}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{pmatrix} \text{ симметрична, т.е. } A = A^* \text{ или } a_{ij} = a_{ji}.$$

Аналогично поверхность второго порядка от координат точки

$$\text{поверхности } (x, y, z) \text{ имеет вид: } (x, \quad y, \quad z, \quad 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ где}$$

$A = A^*$, т.е. матрица уравнения симметрична или $a_{ij} = a_{ji}$.

На практике можно выделить два типа задач, имеющих отношение к кривым и поверхностям второго порядка.

1. Определение вида кривой (поверхности) второго порядка, в частности, классификация различных типов этих кривых (поверхностей).
2. Исследование свойств конкретных типов кривых (поверхностей) второго порядка в собственном (каноническом) базисе (в собственной системе координат), т.е. в такой системе координат, в которой уравнение кривой (поверхности) имеет наиболее простой вид.

Как будет видно из дальнейшего, решение задач (1) сводится к нахождению собственного базиса симметрической матрицы уравнения, т.е. базиса (системы координат), в котором матрица уравнения имеет наиболее простой вид.

Вначале рассмотрим круг задач (2).

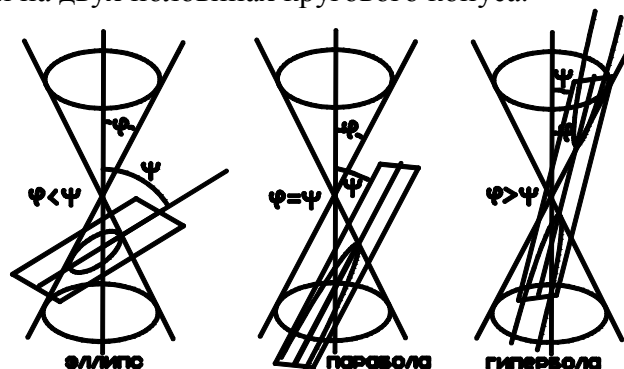
§ 1. Элементарная теория кривых второго порядка.

1. Кривые как конические сечения.

Известно, что невырожденные кривые второго порядка (уравнение которых нельзя разложить в произведение многочленов первого порядка, т.е. не распадающиеся на пару прямых) делятся на эллипсы, гиперболы и параболы. Известно также, что перечисленные кривые можно рассматривать как сечения кругового конуса (поверхности вращения прямой, проходящей через ось вращения)), причём плоскость сечения не должна проходить через вершину

конуса (т.е. через пересечение прямой – образующей конуса через ось вращения).

Пусть угол между образующей конуса и осью конуса равен φ . Тогда, если ψ – угол секущей плоскости с осью вращения лежит в полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}, \varphi\right)$, то в сечении получается эллипс, в частности, при $\psi = \frac{\pi}{2}$ получается окружность (направляющая кругового конуса). При $\psi = \varphi$ в сечении получается парабола. При $\psi \in [0, \varphi)$ в сечении получается гипербола, расположенная на двух половинах кругового конуса.



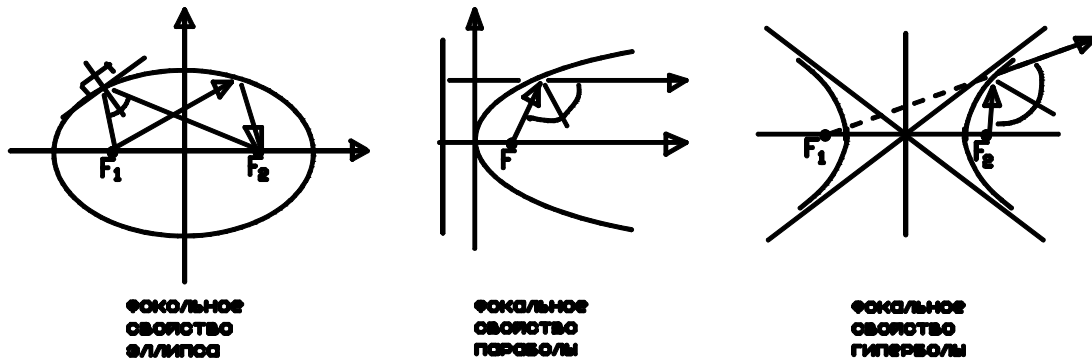
Определения.

1. Фокальная сфера есть сфера, вписанная в плоскость конуса и касающаяся секущей плоскости.
 2. Фокус конического сечения есть точка касания фокальной сферы и секущей плоскости.
 3. Дирекционная плоскость есть плоскость, в которой лежит окружность касания фокальной сферы и полости (половины) конуса.
 4. Директриса есть прямая пересечения дирекционной и секущей плоскости.
2. Фокальные свойства конических сечений (невырожденных кривых второго порядка).

Теорема 1. Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух точек (фокусов эллипса) есть величина постоянная.

Теорема 2. Гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух точек (фокусов гиперболы) есть величина постоянная.

Физические следствия теорем (1) и (2). Если источник света расположен в фокусе эллипса, то после отражения лучей света от кривой эллипса лучи соберутся в другом фокусе (что и оправдывает термин «фокус»). Предполагается при этом, что при отражении выполняется принцип: угол падения равен углу отражения, т.е. нормаль (перпендикуляр) к кривой второго порядка в точке отражения делит угол между падающим и отражённым лучами пополам.



Если при изменении наклона секущей плоскости $\psi \rightarrow \varphi$ и, следовательно, один из фокусов (например, F_2) стремится к бесконечности, и эллипс стремится к параболе, то отражённые из фокуса лучи стремятся быть параллельными. Иначе говоря, поверхность вращения параболы вокруг её оси (параболоид вращения) является идеальным прожектором, источник света которого находится в фокусе этого параболоида.

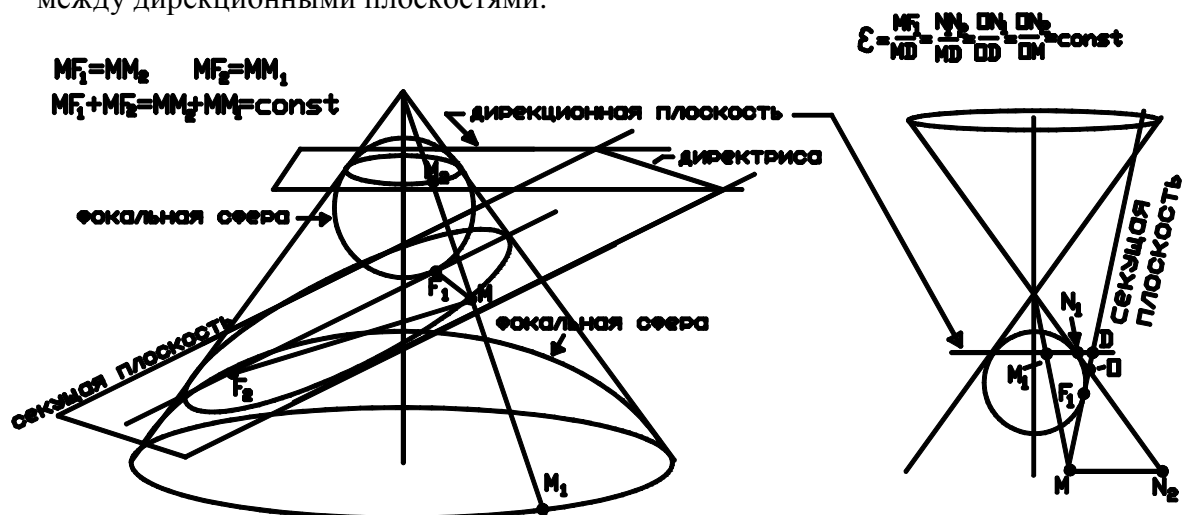
Для гиперболы лучи света, исходящие из одного фокуса (на рисунке F_2) при отражении от кривой дают расходящийся пучок лучей, как если бы они исходили из другого фокуса («мнимый» фокус F_1).

3. Дирекционное свойство конических сечений

Определение. Эксцентриситет конического сечения (т.е. эллипса, гиперболы или параболы) есть отношение расстояния точки сечения до фокуса к расстоянию от этой точки до директрисы. (Следует напомнить, что расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.)

Теорема. Для эллипса, гиперболы и параболы их эксцентриситет для каждой точки этих кривых постоянен. В частности, для эллипса эксцентриситет находится в диапазоне: $[0,1)$, а для параболы $\varepsilon = 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Доказательство фокального свойства конического сечения (см. левый рисунок) основано на том, что расстояние от этой точки до точки касания луча с началом в этой точке со сферой одинаково для всех лучей с началом в этой точке. Поэтому сумма (разность) расстояний от точки конического сечения до фокусов для эллипса (гиперболы) равно длине отрезка образующей конуса между дирекционными плоскостями.



Доказательство дирекционного свойства можно увидеть на правом рисунке, если посмотреть на коническое сечение с точки зрения, расположенной в дирекционной плоскости.

§ 2. Канонические уравнения кривых второго порядка.

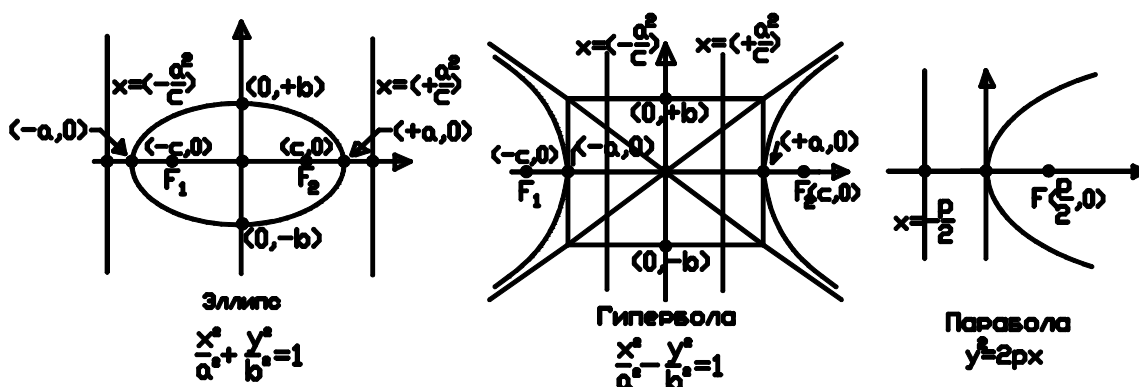
1. Определение.

Центром конического сечения называется центр её симметрии. Ось конического сечения есть ось её симметрии. Эллипс и гипербола суть центральные кривые (т.е. имеющие центр симметрии) и две перпендикулярные оси симметрии.

Парабола имеет ось симметрии и не имеет центра симметрии (ибо если один из фокусов стремится к бесконечности, то и центр симметрии тоже стремится к

бесконечности $\left(\frac{F_1 + \infty}{2} = \infty\right)$).

2. Основные соотношения между параметрами канонических уравнений конических сечений.



Канонические уравнения описывают кривые второго порядка в канонической системе координат, в которой начало координат – центр симметрии и оси координат – оси симметрии кривой (имеются в виду эллипс и гипербола). Для параболы начало канонической системы координат есть точка пересечения параболы и её оси симметрии, при этом ось ОУ касается параболы и, естественно, ортогональна оси ОХ.

Длины полуосей центральных кривых – экстремальные (т.е. максимальные или минимальные) расстояния до точки кривой от центра симметрии. Фокусы эллипса расположены на больших полуосях (точки $(\pm c, 0)$),

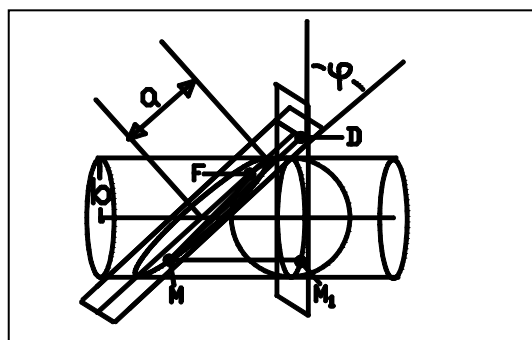
где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, коэффициент искажения $k = \frac{b}{a}$ связан

с эксцентриситетом (для эллипса) соотношением $\varepsilon^2 + k^2 = 1$. Для окружности $k = 1$, для параболы $k = 0$. Доказательство соотношения $\varepsilon^2 + k^2 = 1$ для

эллипса вытекает из того, что эллипс есть растяжение окружности

$x^2 + y^2 = b^2$ радиуса b в $\frac{1}{k} = \frac{a}{b}$ вдоль

оси ОХ.



$$\cos(\varphi) = \frac{b}{a} = k; \quad \sin(\varphi) = \frac{MF}{MD} = \frac{MM_1}{MD} = \varepsilon \quad k^2 + \varepsilon^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1.$$

Здесь цилиндр следует рассматривать как разновидность конуса с бесконечно-удалённой вершиной.

Далее, по фокальному свойству эллипса сумма фокусных расстояний точек пересечения осей симметрии с эллипсом есть $(a+c) + (a-c) = 2\sqrt{b^2 + c^2}$, откуда $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ и из $\varepsilon^2 + k^2 = 1$ получаем: $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Далее, точки пересечения директрис с осью ОХ, где фокусы $F(\pm c, 0)$ суть

$$\left(\pm \frac{a^2}{c}, 0\right) \text{ или дают уравнения директрис: } x = \left(\pm \frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}\right).$$

Для параболы в каноническом виде: $y^2 = 2px$ расположение фокусов $F\left(\pm \frac{p}{2}, 0\right)$ и директрис: $x = \mp \frac{p}{2}$ проверяется составлением уравнения параболы

из

соотношения:

$$1^2 = \varepsilon^2 = \left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \right] / \left(x + \frac{p}{2}\right)^2; \quad x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \quad \text{или} \\ y^2 = 2px.$$

Для гиперболы основные соотношения между параметрами явно проще получить заменой: $b \Rightarrow bi = b\sqrt{-1}$ в формулах для эллипса, а именно:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(bi)^2} = 1 \text{ или: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ При этом ось симметрии ОУ не пересекается с}$$

гиперболой и называется мнимой осью. Фокусы расположены в точках

$$F = (\pm c, 0) = \left(\pm \sqrt{a^2 - (bi)^2}, 0\right) = \left(\pm \sqrt{a^2 + b^2}, 0\right). \text{ Уравнения директрис имеют вид:}$$

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \text{ или } x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Коэффициент искажения } k = \frac{b}{a} \text{ связан с}$$

$$\text{эксцентриситетом } \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \text{ соотношением: } \varepsilon^2 - k^2 = 1, \text{ поскольку:}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1. \text{ Уравнения прямых: } y = \pm \frac{b}{a}x \text{ суть уравнения асимптот, т.е.}$$

прямых, к которым при $x \rightarrow \infty$ и $y \rightarrow \infty$ неограниченно приближаются ветви гиперболы.

§ 3. Аффинная теория кривых второго порядка.

1. Формулы преобразования.

В аффинной теории кроме преобразования сдвига: $\begin{cases} x_1 = x + c_1 \\ y_1 = y + c_2 \end{cases}$

и поворота: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ разрешаются преобразование сжатия-

растяжения: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (в частности, гиперболический поворот:

$k_2 = \frac{1}{k_1}$), а также скос: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ (в частности,

параболический поворот: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2 \\ k \end{pmatrix}$, при котором точка (x, y)

движется по параболе: $y^2 = x$ и $y_1^2 = x_1$). При этом сохраняется параллельность прямых и отношение длин параллельных отрезков.

2. Свойства аффинного преобразования.

Можно показать, что любое аффинное преобразование представимо в виде комбинации поворота, сжатия (растяжения) и скоса. Канонический вид (каноническое уравнение) эллипса и гиперболы в (канонической) системе координат центра симметрии и двух сопряжённых направлений имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$ (для эллипса) и $x^2 - y^2 = 1$ (для гиперболы). Уравнение $y^2 = x$ есть каноническое уравнение параболы. В последнем случае касательная к параболе задаёт сопряжённое направление середин отрезков, параллельных касательной. Это направление есть прямая, параллельная оси симметрии параболы и проходящая через точку касания. Для центральных кривых (эллипса и гиперболы) сопряжённые направления суть также середины параллельных отрезков. При этом эти сопряжённые направления проходят через оси симметрии конического сечения (эллипса или гиперболы), и касательные к кривой, параллельные к сопряжённым направлениям образуют параллелограмм, диагонали которого также проходят через центр симметрии конического сечения. Поскольку у параболы центр симметрии находится в бесконечности, то одно из сопряжённых направлений параллельно оси симметрии параболы.

Доказательство теоремы о сопряжённых направлениях (о том, что середины параллельных отрезков данного направления лежат на сопряжённом направлении) для эллипса доказывается просто: растяжением (сжатием) эллипс преобразуется в окружность, для которой теорема очевидна: сопряжённые направления взаимно ортогональны (перпендикулярны). Поскольку парабола есть предельный случай эллипса, когда один из фокусов стремится к бесконечности, (и, следовательно, один из фокусов стремится туда же), со сопряжённое направление у параболы стремится пересечься с осью симметрии параболы в бесконечности, т.е. параллельно оси симметрии параболы.

Для гиперболы вида $x_1^2 - y_1^2 = 1$ (получается из обычного канонического

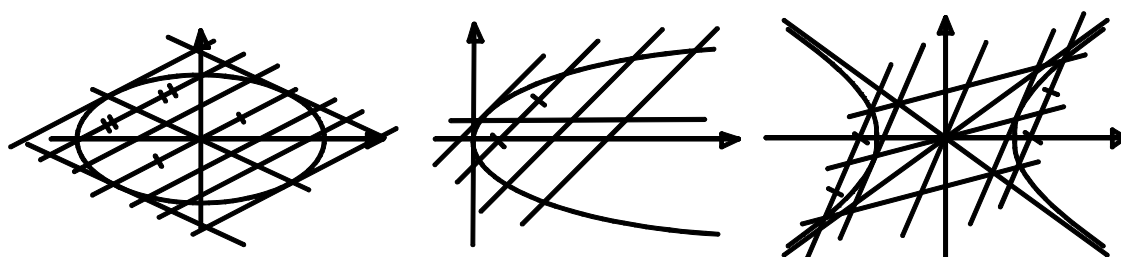
представления: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ аффинным преобразованием : $x_1 = \frac{x}{a}; y_1 = \frac{y}{b}$,

где a и b – оси гиперболы) можно применить преобразование $\begin{cases} x_2 = x_1 - y_1 \\ y_2 = x_1 + y_1 \end{cases}$. В

результате этого преобразования в системе координат (x_2, y_2) график кривой будет иметь вид обратно пропорциональной зависимости: $x_2 \cdot y_2 = 1$ или

$y_2 = \frac{1}{x_2}$. Для этой кривой, как и для окружности, теорема очевидна в случае, если сопряжённые направления – оси симметрии гиперболы. В результате гиперболического поворота с матрицей $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$ теорема становится очевидной

и в общем случае, поскольку при этом параллельность отрезков сохраняется и свойство точки быть серединой отрезка тоже сохраняется. Итак, в соответствии с подходом Ф. Клейна достаточно доказать теорему для очевидного частного случая ортогональных сопряжённых направлений, после чего она становится очевидной и для общего случая, ибо для любого аффинного преобразования параллельность сохраняется и отношение длин параллельных отрезков тоже сохраняется.

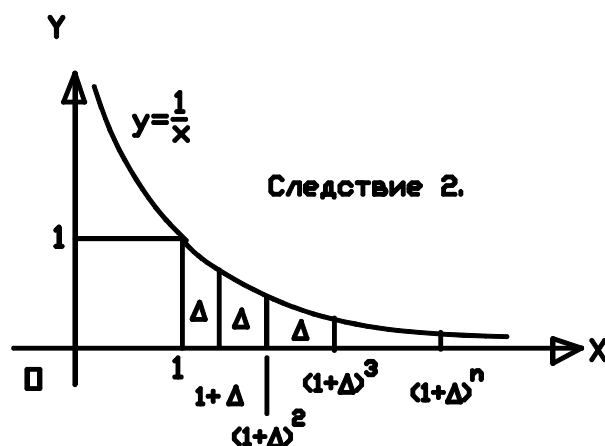
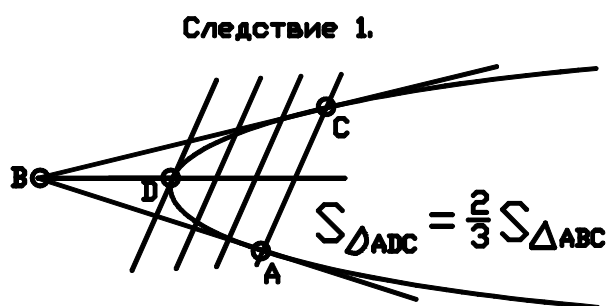


Для дальнейшего использования аффинной теории полезна теорема: аффинное преобразование, определитель матрицы которого равен единице, сохраняет площадь (объём) преобразованных фигур. Эта теорема вытекает из теоремы о том, что определитель произведения матриц равен произведению их определителей. Последняя теорема следует из того, что определитель как ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на преобразованные вектора равен определителю матрицы преобразования, умноженному на ориентированный объём исходных векторов.

Следствие: Эллиптический, гиперболический и параболический повороты не меняют площади фигур. Эллиптический поворот получается так: расширением переводим эллипс в окружность, затем поворачиваем эту окружность, затем сжатием окружность опять переводим в эллипс, равный исходному.

Отсюда получаем следствия.

1. Площадь сегмента, отсечённого от параболы произвольной секущей, равна двум третям от площади треугольника, образованного секущей и двумя касательными к параболе в точках пересечения секущей и параболы.
2. $\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln(x)$.



Первое следствие достаточно доказать в частном случае, когда треугольник равнобедренный (это простое упражнение на интегрирование), тогда в силу принципа Клейна параболическим поворотом из частного случая вытекает общий случай.

Второе следствие вытекает из последовательных гиперболических поворотов бесконечно-тонкой криволинейной трапеции, ограниченной графиком гиперболы $y = \frac{1}{x}$, осью ОХ и прямыми $x = 1$ и $x = 1 + \Delta$ (при бесконечно-малом Δ). При этом параметр k гиперболического поворота равен $1 + \Delta$. Итак, получаем логарифмическую шкалу для площадей:

$\Delta, 2\Delta, \dots, n\Delta = S = \int_1^x \frac{dx}{x}$, соответствующую шкале логарифмической линейки для абсцисс $x = 1, 1 + \Delta, (1 + \Delta)^2, (1 + \Delta)^3, \dots, (1 + \Delta)^n$.

Отсюда: $x = x_n = (1 + \Delta)^n = (1 + \Delta)^{\frac{S}{\Delta}} = \left[(1 + \Delta)^{1/\Delta}\right]^S \rightarrow e^S = x$, и $\int_1^x \frac{dx}{x} = S = \ln(x)$,

ч.т.д.

§ 4. Проективная теория кривых второго порядка.

Приведём без доказательства основные факты проективной теории.

Определение. Проективное преобразование на прямой есть дробно-линейное

преобразование вида: $x' = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d}$. Проективное преобразование на плоскости

имеет вид: $x' = \frac{a \cdot x + b \cdot y + c}{g \cdot x + h \cdot y + p}$, $y' = \frac{d \cdot x + e \cdot y + f}{g \cdot x + h \cdot y + p}$.

Основной проективный инвариант (т.е. числовая функция, не меняющаяся при проективном преобразовании):

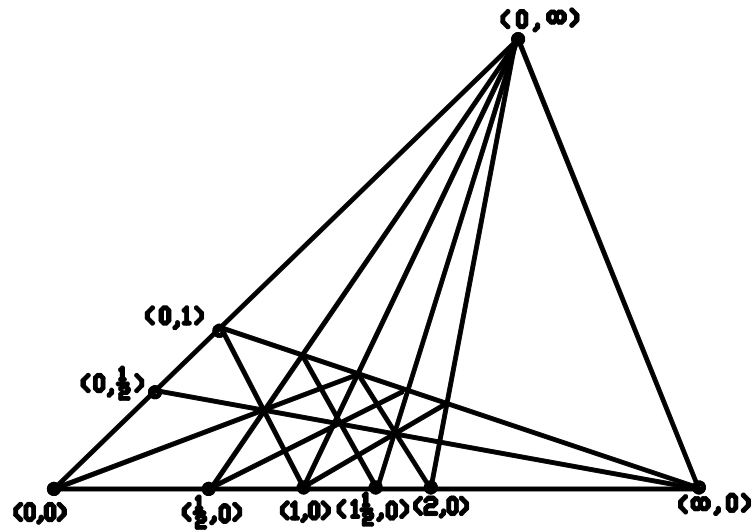
$f(\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{M_3}, \overrightarrow{M_4}) = f(\overrightarrow{M_1}', \overrightarrow{M_2}', \overrightarrow{M_3}', \overrightarrow{M_4}')$ есть так называемое

сложное отношение четырёх точек, лежащих на одной прямой, которое определяется как отношение двух простых отношений:

$$(\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{M_3}, \overrightarrow{M_4}) = \frac{(\overrightarrow{M_1}, \overrightarrow{M_3}, \overrightarrow{M_4})}{(\overrightarrow{M_2}, \overrightarrow{M_3}, \overrightarrow{M_4})} = \frac{\overrightarrow{M_3 M_1} / \overrightarrow{M_1 M_4}}{\overrightarrow{M_3 M_2} / \overrightarrow{M_2 M_4}}.$$

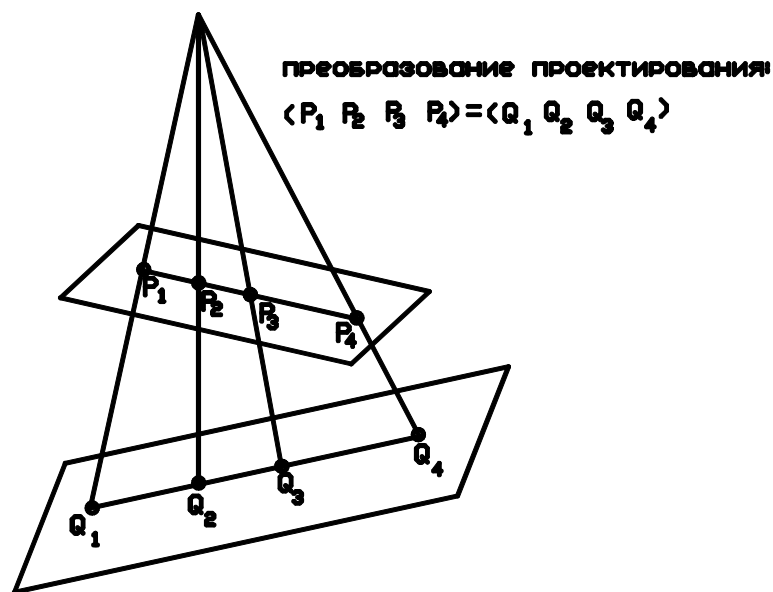
Проективная система координат на плоскости задаётся четырьмя точками

(8 параметров – координат), проективные координаты которых задаются парами чисел: $(M_1(1,0), M_2(\infty,0), M_3(0,1), M_4(0,\infty))$. Точка M_0 с проективными координатами $M_0(0,0)$ есть пересечение прямых $M_1 M_2$ и $M_3 M_4$. Точки проективной сетки строятся как показано на рисунке.



Прямая с точками $(0, \infty)$ и $(\infty, 0)$ – несобственная (находящаяся в проективной бесконечности) прямая проективной плоскости. Можно показать, что проективная сетка плоскости при преобразовании проектирования переходит в проективную сетку другой плоскости, иначе говоря, прямые, соединяющие соответствующие точки обеих сеток, соединяются в одной общей точке – центре проектирования. Отсюда следует, что преобразование проектирования есть проективное преобразование.

S-центр проектирования



Отсюда видно, что эллипс, гипербола и парабола, будучи сечениями кругового конуса, проективно эквивалентны между собой и проективно эквивалентны окружности: $x^2 + y^2 = 1$.

Можно показать, что наиболее простой вид кривая второго порядка имеет (в проективных координатах) в том случае, когда вершины треугольной сетки $(0,0)$, $(\infty,0)$, $(0,\infty)$ образуют относительно кривой второго порядка так называемый автополярный треугольник, в котором секущие, проходящие через вершину треугольника, дают в пересечении с коническим сечением гармоническую четвёрку со сложным отношением значение: -1 . Иначе говоря (см. рисунок ниже) точки M_1, M_2, M_0, M_∞ дают гармоническую четвёрку:

$$(M_1, M_2, M_0, M_\infty) = \frac{\overrightarrow{M_0, M_1}}{M_1, M_\infty} \bigg/ \frac{\overrightarrow{M_0, M_2}}{M_2, M_\infty} = -1. \text{ Напомним, что если } \vec{a} = k \cdot \vec{b}, \text{ то}$$

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = k \text{ по определению (см. определение коллинеарных векторов).}$$

Если $M_\infty \rightarrow \infty, (\infty, 0) \rightarrow \infty, (0, \infty) \rightarrow \infty$, то M_0 становится центром симметрии, а стороны автополярного треугольника определяют сопряжённые направления. Если эти направления взаимно ортогональны, то стороны автополярного треугольника суть оси симметрии конического сечения.

§ 5. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.

1. Введение.

Привести кривую второго порядка к каноническому виду означает найти систему координат (каноническую систему координат), в которой уравнение кривой имеет наиболее простой вид. Затем по этому виду можно определить, например, вид кривой, положение фокусов и директрис. Для центральных кривых (эллипса, гиперболы) оси канонической системы координат суть оси симметрии кривой, начало канонической системы координат – пересечение осей симметрии кривой, т.е. её центр симметрии. Для нецентральной кривой (параболы) ось OX – ось симметрии кривой, начало координат (псевдоцентр) точка пересечения параболы и её оси симметрии, ось OY касается параболы в её псевдоцентре.

Уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \text{ или то же в матричном виде:}$$

$$(x, y, 1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \text{ где } a_{12} = a_{21}, a_{10} = a_{01}, a_{20} = a_{02},$$

$$\text{или: } \vec{x}_p^* \cdot A_p \cdot \vec{x}_p = 0, \text{ где}$$

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_p^* = (\vec{x}_p)^* = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^* = (x, y, 1).$$

В дальнейшем будем называть $\vec{x}_p$ расширенным вектором, а A_p – расширенной матрицей кривой второго порядка. Напомним, что символ * (звёздочка) – знак транспонирования вектора или матрицы.

С использованием понятий суженного вектора и суженной матрицы уравнение кривой второго порядка можно написать ещё и так:

$$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{10}, a_{20}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0 \text{ или}$$

$$\vec{x}^* \cdot A \cdot \vec{x} + 2\vec{b}^* \cdot \vec{x} + a_{00} = 0, \text{ где } A = A_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \text{суженная матрица кривой,}$$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix}$ – суженный вектор кривой, его транспонированный вариант выглядит

так: $\vec{b}^* = (\vec{b})^* = (b_{10}, b_{20})$ и $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – радиус-вектор точки кривой.

1. Приведение центральной кривой второго порядка к каноническому виду включает в себя следующие этапы.

Определение центра симметрии.

Определение собственных векторов и собственных значений суженной матрицы A .

Определение полуканонического вида кривой.

Определение формул преобразования координат из исходной системы координат в каноническую и обратно.

Определение канонического вида кривой.

Построение кривой.

2. Приведение центральной кривой второго порядка к каноническому виду.

- 2.1 Нахождение центра симметрии.

Ищем преобразование сдвига: $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$, соответственно: $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ такое,

чтобы в новых координатах (x', y') уравнение кривой не содержало слагаемых, содержащих x', y' в первой степени, не выдерживающих преобразование

центральной симметрии: $\begin{cases} x'' = -x' \\ y'' = -y' \end{cases}$. Подставим $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_0$ в уравнение кривой,

получим:

$$(\vec{x}_1^* + \vec{x}_0^*)A(\vec{x}_1 + \vec{x}_0) + 2\vec{b}^*(\vec{x}_1 + \vec{x}_0) + c_{00} = \vec{x}_1^*A\vec{x}_1 + 2\vec{x}_1^*(A\vec{x}_0 + \vec{b}) + (\vec{x}_0^*A\vec{x}_0 + 2\vec{b}^*\vec{x}_0 + a_{00}) = 0$$

или $\vec{x}_1^*A\vec{x}_1 + 2\vec{x}_1^*\vec{b}' + a_{00}' = 0$, где $\vec{b}' = (A\vec{x}_0 + \vec{b})$ и

$$a_{00}' = (\vec{x}_0^*A\vec{x}_0 + 2\vec{b}^*\vec{x}_0 + a_{00}).$$

Отсюда получаем уравнение центра симметрии: $\vec{b}' = (A\vec{x}_0 + \vec{b}) = 0$ или в

координатах: $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0 \end{cases}$. Итак, центром симметрии в

исходных координатах является точка: $\vec{M}_0(x_0, y_0)$. Очевидно, в новых

координатах (x', y') уравнение кривой $\vec{x}_1^*A\vec{x}_1 + a_{00}' = 0$ не меняется при

преобразовании центральной симметрии: $\begin{cases} x'' = -x' \\ y'' = -y' \end{cases}$.

2.2 Нахождение осей симметрии кривой (собственных векторов и собственных значений суженной матрицы A).

Переобозначим для простоты систему координат центра симметрии через (x, y) , т.е. будем считать, что в исходной системе координат начало координат есть уже центр симметрии, и уравнение кривой имеет вид:

$\Phi(x, y) \equiv \vec{x}^* \cdot A \cdot \vec{x} + a_{00} = 0$. Нахождение осей симметрии эллипса или гиперболы с центром симметрии в начале координат сводится к классической задаче Лагранжа условного экстремума целевой функции радиуса (или квадрата радиуса – считать проще) с условием, что точка находится на кривой. Иными словами, на пересечении осей симметрии с кривой расстояние точек кривой до центра симметрии максимально или минимально (т.е. экстремально). Суть подхода Лагранжа к решению данной задачи состоит в том, что в

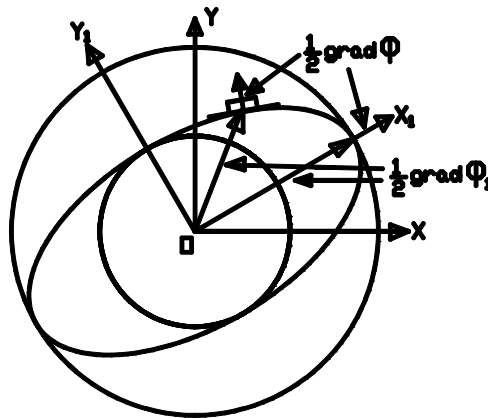
экстремальных точках кривые $\Phi(x, y) \equiv \vec{x}^* \cdot A \cdot \vec{x} + a_{00} = 0$ и

$\Phi_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 = \text{const}$ имеют общую касательную, т.е. градиенты указанных кривых коллинеарны (см. рисунок). Иначе говоря,

$$\frac{1}{2} \text{grad} \Phi(x, y) = \lambda \frac{1}{2} \text{grad} \Phi_1(x, y) \text{ или } A\vec{x} = \lambda \vec{x}. \text{ Отсюда: } A\vec{x} - \lambda \vec{x} = (A - \lambda E)\vec{x} = 0.$$

Однородное линейное уравнение имеет нетривиальное решение, отличное от нуля тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы отличен от нуля. Таким образом, получаем характеристическое уравнение для нахождения

$$\text{множителя } \lambda: |A - \lambda E| = 0 \text{ или } \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$



Определение. Собственным вектором матрицы A называется вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству: $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$. В этом случае число λ называется собственным значением матрицы A . Из предыдущих рассуждений видно, что направления осей симметрии определяются собственными векторами суженной

матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Для эффективного вычисления этих векторов следует

вспомнить известную теорему линейной алгебры о том, что всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению, что в данном случае можно проверить прямым вычислением. Итак, имеем:

$$A^2 - (a_{11} + a_{22})A + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} E = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) = 0. \text{ Здесь } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

единичная матрица, λ_1, λ_2 – два корня характеристического уравнения, т.е. собственные числа матрицы A или её спектр. Отсюда видно, что собственный вектор $\overrightarrow{f(\lambda_1)}$, соответствующий собственному значению λ_1 образуют столбцы матрицы $(A - \lambda_2 E)$. Аналогично, для $\overrightarrow{f(\lambda_2)}$ можно выбрать какой либо из столбцов $(A - \lambda_1 E)$.

Полуканоническое уравнение центральной кривой второго порядка имеет следующий вид: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_0 = 0$. При этом λ_1, λ_2 – два корня

характеристического уравнения, λ_0 вычисляется по формуле: $\lambda_0 = \frac{|A|}{\lambda_1 \lambda_2}$. Дело в

том, что определитель суженной матрицы $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ не меняется при

сдвигах и поворотах, ибо эти преобразования не меняют площади (объёмы) фигур. Поскольку определитель произведения матриц равен произведению их определителей и, учитывая, что $A' = C^{-1} A C$, получаем, что

$$|A'| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_0 = |C|^{-1} |A| |C| = 1^{-1} |A| \cdot 1 = |A|, \text{ что и обосновывает}$$

формулу для вычисления λ_0 .

2.3 Переход от старой системы координат к новой.

Он даётся формулой: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$, причём строки матрицы $C = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_n(\lambda_1)} \\ \overrightarrow{f_n(\lambda_2)} \end{pmatrix}$

суть нормированные собственные вектора суженной матрицы A , т.е.

$$\overrightarrow{f_n(\lambda_1)} = \frac{\overrightarrow{f(\lambda_1)}}{|\overrightarrow{f(\lambda_1)}|} \text{ и, аналогично, для } \lambda_2: \overrightarrow{f_n(\lambda_2)} = \frac{\overrightarrow{f(\lambda_2)}}{|\overrightarrow{f(\lambda_2)}|}. \text{ Знаки строк –}$$

собственных векторов матрицы C следует выбирать так, чтобы сохранилась ориентация преобразования C , а именно, чтобы $|C| = +1$. Обратное

преобразование даётся формулой: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^* \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Следует иметь в виду,

что для ортогонального преобразование (на меняющего расстояния и углы) обратная матрица совпадает с транспонированной: $C^{-1} = C$; $C^* \cdot C = E$.

Проверка (1.3) и (1.4). Если в полуканоническое уравнение: $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_0 = 0$

подставить выражение (x_1, y_1) через (x, y) по формуле: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$, то мы

получим исходное уравнение кривой по условию задачи: $\overrightarrow{x_p^*} \cdot A_p \cdot \overrightarrow{x_p} = 0$.

2.4. Каноническое уравнение центральной кривой

Оно получается из полуканонического по формулам: $\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, где

$$a = \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}; \quad b = \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_2}}, \quad \text{причём мнимому значению } b \text{ соответствует знак}$$

минус перед $\frac{y_1^2}{b^2}$ в каноническом уравнении кривой второго порядка. Формулы для длин полуосей a и b лучше вычислять подстановкой в полуканоническое уравнение точек пересечения осей симметрии (точки $(a,0)$ и $(0,b)$).

Определение типа центральной кривой лучше всего определять по формулам: $a = \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}; \quad b = \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_2}}$. Если длины полуосей все действительны, имеем действительный эллипс: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, если они все мнимы, то получается мнимый эллипс: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = -1$, если a действительно, b мнимо, то получаем гиперболу, пересекающую ось ОХ: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, если a мнимо, а b действительно, от получаем гиперболу, пересекающую ось ОУ: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = -1$.

В справочниках приводятся следующие формулы для определения типа центральной кривой второго порядка.

Случай: $\lambda_1 \lambda_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ соответствует гиперболу.

Случай: $\lambda_1 \lambda_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ соответствует

действительному эллипсу при $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_0 = |A_p| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} < 0$ и

мнимому эллипсу при $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_0 = |A_p| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} > 0$.

2.5 Построение центральной кривой второго порядка.

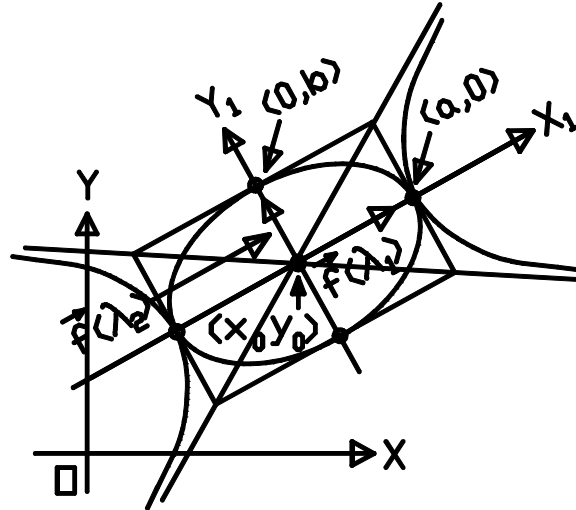
Оно включает в себя следующие этапы.

Построение центра симметрии.

Построение осей симметрии, для чего строятся собственные (вообще говоря, не нормированные) вектора $\vec{f}(\lambda_1)$ и $\vec{f}(\lambda_2)$, исходящие из общего начала – центра симметрии.

Построение асимптотического прямоугольника, стороны которого параллельны осям симметрии и проходят через точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$, расположенные на

осях симметрии. В случае эллипса внутри этого прямоугольника вписывается овал, касающийся изнутри этого прямоугольника его сторон. В случае гиперболы строятся диагонали асимптотического прямоугольника, являющиеся асимптотами гиперболы. После этого строятся ветви гиперболы, касающиеся извне сторон асимптотического прямоугольника и приближающиеся бесконечно близко к асимптотам, когда расстояние от точки графика гиперболы до начала координат по модулю стремится к бесконечности.



Проверка построения. Ищем точки пересечения построенной кривой с исходными осями координат, для чего приравниваем одну из координат исходного уравнения к нулю и решаем полученное квадратное уравнение. Если полученные таким алгебраическим вычислением точки совпадут с соответствующими точками на чертеже, то кривая, скорее всего, построена правильно.

3. Приведение параболы и вырождающихся кривых второго порядка к каноническому виду.

Для параболы уравнение для определения центра симметрии не имеет решения. Это значит, что $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$, но

$$|A_p| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_0 \neq 0. \text{ Можно показать, что определитель}$$

расширенной матрицы пропорционален кривизне кривой, и, следовательно, обращение его в нуль есть необходимое и достаточное условие вырождения кривой второго порядка в пару действительных или мнимых прямых. Алгебраически это выражается в разложении левой части исходного уравнения кривой на два линейных множителя в виде:

$$(A_1 x + B_1 y + C_1) \cdot (A_2 x + B_2 y + C_2) = \overrightarrow{x_p^*} \cdot A_p \cdot \overrightarrow{x_p} = 0.$$

Анализ параболы производится следующим образом.

1. Поскольку парабола не имеет центра симметрии, ищем ось симметрии параболы. Уравнение для оси симметрии параболы вытекает из того, что нормаль (перпендикуляр) к графику параболы, т.е. градиент левой части её исходного уравнения, пропорционален собственному вектору с нулевым собственным значением, параллельному оси симметрии параболы. Итак:

$$\frac{1}{2} \text{grad}(\vec{x}_p^* \cdot A_p \cdot \vec{x}_p) \equiv \frac{1}{2} \text{grad} \Phi(x, y) \parallel \overrightarrow{f(0)} \text{ или}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} & a_{21}x + a_{22}y + a_{20} \\ f_x(0) & f_y(0) \end{vmatrix} = 0, \text{ или}$$

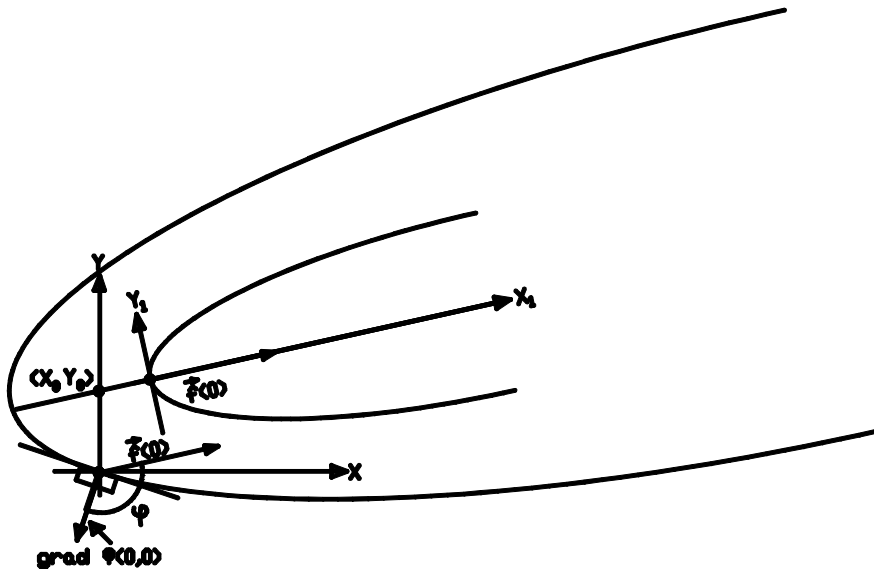
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ f_x(0) & f_y(0) \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ f_x(0) & f_y(0) \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_{10} & a_{20} \\ f_x(0) & f_y(0) \end{vmatrix} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{10}}{f_x(0)} = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{20}}{f_y(0)} - \text{суть три вида уравнения оси}$$

симметрии параболы.

2. Ищем псевдоцентр параболы в его начальном варианте, т.е. какую либо точку на оси симметрии параболы, для простоты расчётов лучше всего взять точку пересечения оси симметрии параболы с одной из осей исходной системы координат.

3. Выбираем ориентацию собственного вектора $\overrightarrow{f(0)}$ «внутри» параболы. Иначе: $(\text{grad}\Phi(0,0) \cdot \overrightarrow{f(0)}) < 0$, т.е. угол φ между векторами $\text{grad}\Phi(0,0)$ и $\overrightarrow{f(0)}$ меньше 90° (см. рисунок).



4. Ориентацию вектора $\overrightarrow{f(\lambda_2)}$ ($\lambda_2 \neq 0$) выбираем так, чтобы определитель $|C|$ компонент собственных векторов или, что то же, определитель матрицы преобразования координат был бы положителен, ибо при этом не меняется ориентация при преобразовании координат.

5. Как и в случае центральной кривой напомним формулы перехода из исходной системы координат в систему координат псевдоцентра и оси симметрии.
6. В системе псевдоцентра уравнение параболы имеет вид:
 $0 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot y_1^2 + 2px_1 + \lambda_0 = 0$, знак параметра p совпадает со знаком выражения: $(\text{grad}\Phi(0,0) \cdot \overrightarrow{f(0)}) = a_{10} \cdot f_x(0) + a_{20} \cdot f_y(0)$, модуль $|p|$ определяется из того, что определитель расширенной матрицы не меняется при преобразовании координат.

$$\text{Именно: } |A_p| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} = A'_p = \begin{vmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -p^2 \cdot \lambda_2,$$

$$\text{откуда: } |p| = \sqrt{-\frac{|A_p|}{\lambda_2}}. \text{ Поскольку}$$

$$\Phi(x_0, y_0) = \Phi'(0,0) = \lambda_2 \cdot 0^2 + 2p \cdot 0 + \lambda_0 = \lambda_0, \text{ то } \lambda_0 = \Phi(x_0, y_0),$$

т.е. значение левой части исходного уравнения от координат псевдоцентра в исходной системе координат.

7. Очевидно, в системе координат псевдоцентра уточнённый псевдоцентр параболы (точка пересечения параболы с осью симметрии) имеет координаты: $(x_1, y_1) = \left(-\frac{\lambda_0}{2p}, 0\right)$, ибо в этой точке

$$0 \cdot x_1^2 + \lambda_2 \cdot y_1^2 + 2px_1 + \lambda_0 = 0. \text{ Отсюда получаем координаты}$$

$$\text{уточнённого псевдоцентра: } \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \left(\frac{\overrightarrow{f_n(0)}}{f_n(\lambda_2)} \right)^* \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_0}{2p} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}. \text{ На}$$

основании этого получаем окончательно формулы прямого и обратного преобразований координат. Полуканоническое уравнение параболы в системе координат (x_2, y_2) имеет вид: $\lambda_2 \cdot y_2^2 + 2px_2 = 0$ и каноническое уравнение параболы имеет вид: $y_2^2 = 2p_2x_2$, где:

$$p_2 = -\frac{p}{\lambda_2} \text{ и } x_2 = x_1 + \frac{\lambda_{0p}}{2p}; \quad y_2 = y_1.$$

4. Классификация вырожденных кривых второго порядка.

Условие вырожденности есть условие обращения в нуль кривизны кривой или, что то же, условие обращения в нуль определителя расширенной матрицы. Итак, получаем следующую классификацию вырожденных кривых второго порядка.

1. Пара мнимых прямых с действительной точкой пересечения.

$$\text{Каноническое уравнение: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ или } \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a}i\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{a}i\right) = 0.$$

$$\text{Условие: } |A_p| = 0; \quad |A| > 0.$$

2. Пара действительных пересекающихся прямых (вырождение гиперболы в пару асимптот). Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ или $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{a}\right) = 0$. Условие: $|A_p| = 0$; $|A| < 0$.
3. Пара параллельных прямых (вырождение параболы). Уравнение для центра симметрии имеет бесконечное множество решений. Основное условие: $|A| = 0$; $|A_p| = 0$; $0 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = Sp(A) \neq 0$. Sp – след матрицы. Дополнительное условие: $\Phi(x_0, y_0) \neq 0$, где (x_0, y_0) – псевдоцентр.
4. Пара совпадающих прямых. Основное условие то же, что и в предыдущем случае, но $\Phi(x_0, y_0) = 0$. Бесконечное множество центров симметрии удовлетворяют уравнению кривой (достаточно проверить псевдоцентр).

§ 6. Поверхности второго порядка.

1. Приведение к каноническому виду.

Поверхность второго порядка в трёхмерном евклидовом пространстве описывается (аналогично кривой второго порядка на плоскости) уравнением:

$$\vec{x}_p^* \cdot A \cdot \vec{x}_p = 0, \text{ где } A_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ причём расширенная}$$

матрица симметрична, т.е. $A_p = A_p^*$, $\partial . \dot{a}$ $a_{ij} = a_{ji}$, где $i, j = 1, 2, 3, 0$.

Уравнение центра симметрии (если таковой существует) определяется

системой уравнений: $A \cdot \vec{x}_0 + \vec{b} = 0$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – суженная матрица,

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ – радиус – вектор центра симметрии, } \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \end{pmatrix} \text{ – вектор свободных}$$

членов системы.

Собственные значения суженной матрицы A суть корни характеристического уравнения: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \text{ Собственные вектора матрицы } A \text{ суть столбцы}$$

матричных произведений: $\overline{f(\lambda_i)} = (A - \lambda_i E) \cdot (A - \lambda_k E)$, где $i \neq j \neq k$,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица. Разумеется, при совпадении собственных

значений возможен произвол в выборе собственных векторов.

Полуканоническое уравнение поверхности в канонических координатах для центральной поверхности второго порядка имеет вид:

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \lambda_0 = 0$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического

уравнения, $\lambda_0 = \frac{|A_p|}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3} = \frac{|A_p|}{|A|}$ свободный член.

2. Классификация центральных поверхностей второго порядка.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k$, где $k \neq 0$ или $k = 0$. При $k = +1$ имеем действительный трёхосный эллипсоид, при $k = -1$ имеем мнимый эллипсоид, при $k = 0$ имеем мнимый конус с действительно (вещественной) вершиной.

2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k$, где $k \neq 0$ или $k = 0$. При $k = +1$ имеем однополостный гиперболоид, при $k = -1$ имеем двуполостный гиперболоид, при $k = 0$ имеем действительный конус. Значения длин полуосей a, b и c получаются подстановкой точек пересечения осей симметрии с центральными поверхностями второго порядка $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$ в полуканоническое уравнение: $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \lambda_0 = 0$. Например: $\lambda_1 a^2 + \lambda_2 0^2 + \lambda_3 0^2 + \lambda_0 = 0$,

$$\text{откуда: } |a| = \sqrt{-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}.$$

3. Нецентральные поверхности (параболоиды).

Уравнение для центра симметрии имеет бесконечные решения вида:

$\frac{k}{\infty}$ ($k \neq 0$) хотя бы для одной из координат центра симметрии, т.е. $|A_p| \neq 0$

(гауссова кривизна как произведение кривизн двух ортогональным нормальных сечений отлично от нуля), но $|A| = 0$. Ищем ось симметрии ($\vec{f}(0)$) параллелен

$\text{grad}\left(\vec{x}_p^* A_p \vec{x}_p\right)$ (предполагается, что только одно из трёх собственных значений

расширенной матрицы A_p равно нулю)). Затем находим предварительный

псевдоцентр на пересечении оси симметрии с одной из координатных плоскостей (одна из координат этого псевдоцентра равна нулю). После этого (аналогично случаю нецентральной кривой) находим преобразование координат о окончательный псевдоцентр как пересечение параболоида с осью симметрии.

Полуканонический вид параболоида следующий:

$$0 \cdot x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2px + \lambda_0 = 0.$$

Канонические уравнения для параболоидов выглядят так: $\frac{x^2}{p} \pm \frac{y^2}{q} = 2z$, где $(p > 0), (q > 0)$. Знак «+» в уравнении даёт эллиптический параболоид, знак «-» – гиперболический параболоид.

4. Вырождающиеся поверхности второго порядка.

Условие вырождения: $|A_p| = 0$. Если при этом $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \neq 0$, то имеем развёртывающуюся на плоскость поверхность – действительный конус. Если одно из собственных значений матрицы $|A|$ отлично от нуля, (при $|A_p| = 0$), то получаются цилиндры: эллиптический, гиперболический и параболический, а также пару пересекающихся плоскостей. При двукратном вырождении (ровно два из трёх собственных значений равны нулю, но $\lambda_0 \neq 0$) получаем пару параллельных плоскостей, при трёхкратном вырождении ($\lambda_0 = 0$) получаем пару совпадающих плоскостей.

§ 7. Программа приведения кривых второго порядка к каноническому виду.

Для более подробного ознакомления с техникой приведения кривых второго порядка к каноническому виду предлагается программа, написанная на языке Maple (версия 9.1), реализующая алгоритм, описанный в теоретической части курса.

1. Описание алгоритма.

Левая часть уравнения кривой задаётся в величине f в аналитическом виде. Алгоритм делится на ряд этапов.

1. Этап.

Выделяются коэффициенты $a11, a12, a22, a10, a20, a00$, формируется суженная матрица A и расширенная матрица Ar . Вычисляются определители этих матриц dA и dAr . Анализируется случай центральной кривой ($dA \neq 0$) и распадаения кривой на пару пересекающихся прямых ($dA \neq 0; dAr = 0$). Для центральной кривой вычисляется центр симметрии $(x0, y0)$.

2. Этап.

Вычисляются собственные значения $k1, k2$ (eigenvalues) в дробном виде и в виде с плавающей запятой $rk1, rk2$. Вычисляются собственные вектора $f1, f2$ (eigenvectors). Далее вычисляются нормированные собственные вектора $nf1, nf2$ ($nvec$ – подпрограмма нормирования). При этом: $|\overrightarrow{nf1}| = 1$ и $|\overrightarrow{nf2}| = 1$.

Вычисляются матрица собственных векторов $C1$ и её определитель $dC1$. Меняются знаки у собственных векторов так, чтобы $C1[1,1] > 0$ и $dC1 > 0$. Вычисляются матрицы поворота C и rC в дробном и, соответственно, в плавающем виде. ($evalf$ – подпрограмма, встроенная в Maple, переводит величины из дробного вида в вид с плавающей запятой).

3. Этап (для параболы).

Вычисляется ось симметрии параболы в виде: $asx \cdot x + asy \cdot y + as0 = 0$. Вычисляется псевдоцентр-1 параболы $(x0, y0)$ (точка пересечения оси

симметрии параболы с какой-либо из осей исходной системы координат). Вычисляется вектор преобразования исходных координат в систему координат псевдоцентра-1 (начало этой системы координат – псевдоцентр-1, ось O_1X_1 – ось симметрии параболы) – двумерный вектор – столбец.

4. Этап.

Вычисляется полуканонический вид $fsemi$ (semicanonical form) для центральной кривой $dA \neq 0$, её вариант с плавающей запятой $rfsemi$, а также их приведённый (упрощённый) вид $fver$ и $rfver$. Упрощение (в частности, приведение подобных членов выполняет подпрограмма *simplify*, встроенная в Maple). Упрощённый вид в дальнейшем нам понадобится для проверки правильности вычислений, так как он должен совпадать с правой частью исходного уравнения f .

Для параболы полуканонический вид (semicanonical form of parabol) вычисляется несколько сложнее. Вначале вычисляются координаты псевдоцентра-2 xuc – точки пересечения параболы с её осью симметрии и исходной системе координат. Вычисляется параметр p и полуканонический вид-1 параболы в системе координат псевдоцентра-1 $fsemi1$ и его упрощённый вариант $fver1$. Затем вычисляются полуканонический вид-2 $fsemi2$ и его упрощённый вариант $fver2$ параболы (без свободного члена) с началом канонической системы координат параболы с центром в точке пересечения параболы с её осью симметрии. Вычисляются также полуканонические виды параболы $rfsemi2$ и $rfver2$ в представлении с плавающей запятой.

5. Этап (проверка).

Как видно из результатов вычислений, неупрощённые формы полуканонического представления $fsemi1$, $rfsemi1$ центральной кривой и её упрощённые формы $fver$ и $rfver$ служат для проверки вычислений, так как эти формы должны совпадать с левой частью исходного уравнения кривой $f = 0$.

Для параболы аналогичные выражения будут $fsemi2$, $rfsemi2$, $fver2$ и $rfver2$, причём $fver2$ и $rfver2$ должны совпадать с с левой частью исходного уравнения кривой $f = 0$.

6. Этап.

Построение кривой второго порядка выполняет подпрограмма *plotcurv*. Подпрограмма *implicitplot*, встроенная в систему Maple, рисует исходную кривую $f = 0$ и её оси канонической системы координат (оси симметрии) $fx = 0$ и $fy = 0$. Проверка производится визуально по симметрии.

2. Некоторые величины, используемые в подпрограмме.

$f = 0$ – исходное уравнение кривой.

$\left. \begin{matrix} fx = 0 \\ fy = 0 \end{matrix} \right\}$ – оси симметрии кривой.

$(x0, y0)$ – центр симметрии кривой.

$S1$ – матрица ненормированных собственных векторов.

C – матрица поворота от исходной к канонической системе координат.

A, Ar – суженная и расширенная матрицы кривой.

A_{inv} – матрица, обратная матрице A , её свойство: $A \cdot A_{inv} = E$.

E – единичная матрица.

3. Текст программы приведения кривой второго порядка к каноническому виду.

```
> restart;
with(LinearAlgebra):
#f:= x^2-x*y-y^2-2*x-4*y-2; f:=2*f; #-----var 29.5-----
#f:= 5*x^2+8*x*y+5*y^2-18*x-18*y+9;
#f:= 4*x^2-4*x*y+y^2-2*x-14*y+7;print('test');
nvec:= proc(vec) local nv;
nv:= sqrt(vec[1]^2+vec[2]^2);vec/nv;
end proc;
#-----subprog-----
subcurv := proc( ) global
f,fx,fy,a11,a22,a12,a21,a10,a20,a00,A,Ar,
b0,Ainv,xy0,E,x0,y0,dA,dAr,E2,Ax,cx1,cx2,cx0,dd,k1,k2,k0,
kr,rk1,rk2,mv1,mv2,f1,f2,C1,dC1,nf1,nf2,C,rC,y1,y2,msim,f
sim,asx,asy,as0,mx0,Cx,
fsemi,rk0,rCx,rfsemi1,fver,rfver,xx,xxtr,ff,ffs,xx0,xxtr0
,ff0,p,rp,zp,Ct,xyz,
fsemi1,fver1,xc,yc,mxc,Cx1,fsemi2,fver2,rCx1,rfsemi2,rfve
r2;
fx:=coeff(f,x);fy:=coeff(f,y);a11:=coeff(f,x^2);a22:=coef
f(f,y^2);a12:=coeff(fx,y)/2;a21:=coeff(fy,x)/2;
a10:=(fx-2*a12*y)/2;a20:=(fy-2*a21*x)/2;a00:=f-a11*x^2-
a22*y^2-2*a12*x*y-2*a10*x-2*a20*y;
A:=<<a11 | a12>, <a21 | a22>>;Ar:=<<a11 | a12 | a10>,
<a21 | a22 | a20>, <a10 | a20 | a00>>;
#m:=<<1 | 1>, <2 | 4>>;x:=<<2>,
<1>>;b:=m.x;minv:=MatrixInverse(m);x1:=minv.b;
dA:=Determinant(A);dAr:=Determinant(Ar);if dA<>0 then
b0:=<<-a10>, <-
a20>>;Ainv:=MatrixInverse(A);xy0:=Ainv.b0;E:=<<1 | 0>, <0
| 1>>;x0:=xy0[1,1];y0:=xy0[2,1];
else print ("central-x0y0=",x0,y0); if dAr=0 then print
("deux droits"); fi; fi; #droits
#-----eigenvalues-----
E2:=<<1 | 0>, <0 | 1>>;
Ax:=A-
x*E2;fx:=Determinant(Ax);cx2:=coeff(fx,x^2);cx1:=coeff(fx
,x);cx0:=fx-cx2*x^2-cx1*x;
dd:=sqrt(cx1^2-4*cx2*cx0);k1:=(-cx1+dd)/(2*cx2);k2:=(-
cx1-dd)/(2*cx2);print('k1k2',k1,k2);
rk1:=evalf(k1);rk2:=evalf(k2);
if abs(rk2)<abs(rk1) then
kr:=k1;k1:=k2;k2:=kr;print('k1k2',k1,k2);
fi;print('rk1rk2',rk1,rk2);
#-----eigenvectors-----
```

```

mv1:=A-k2*E2;mv2:=A-k1*E2;f1:=<mv1[1,1] | mv1[2,1]>;if
evalf(f1[1])<0 then f1:=-f1; fi;
f2:=<mv2[1,1] | mv2[2,1]>;C1:=<<f1[1] | f1[2]>, <f2[1] |
f2[2]>>;dC1:=Determinant(C1);
if evalf(dC1)<0 then f2:=-f2;
fi;nf1:=nvec(f1);nf2:=nvec(f2);
C:=<<nf1[1] | nf1[2]>, <nf2[1] | nf2[2]>>;rC:=evalf(C);
#-----axe of symmetry-----
if dA=0 then y1:=a11*x+a12*y+a10;y2:=a21*x+a22*y+a20;
msim:=<<y1 | y2>, <f1[1] | f1[2]>>;
fsim:=Determinant(msim);asx:=coeff(fsim,x);asy:=coeff(fsi
m,y);as0:=fsim-(asx*x+asy*y);x0:=0;y0:=0;
if asx <>0 then y0:=0;x0:=-as0/asx; else if asy<>0 then
x0:=0;y0:=-as0/asy; fi; fi; fi;#--of symmetry--
mx0:=<<x-x0>, <y-y0>>;Cx:=C.mx0;Cx:=simplify(Cx);
#-----semicanonich form----
if dA<>0 then
dAr:=Determinant(Ar);k0:=dAr/(k1*k2);fsemi:=k1*x1^2+k2*y1
^2+k0;fsemi1:=k1*Cx[1,1]^2+k2*Cx[2,1]^2+k0;
rk1:=evalf(k1);rk2:=evalf(k2);rk0:=evalf(k0);rCx:=evalf(C
x);rfsemi1:=rk1*rCx[1,1]^2+rk2*rCx[2,1]^2+rk0;
fver:=simplify(fsemi1);rfver:=simplify(rfsemi1);
print("fsemi1",fsemi1);print("rfsemi1",rfsemi1);print("fv
er",fver);print("rfver",rfver);
print("Cx",Cx); else print("semi canon form of parabol");
#-----semi-canonical form of parabol-----
xxtr:=<<x | y | 1>>;xx:=<<x>, <y>,
<1>>;ff:=xxtr.Ar.xx;ffs:=simplify(ff);print("x0y0=",x0,y0
);
xxtr0:=<<x0 | y0 | 1>>;xx0:=<<x0>, <y0>,
<1>>;ff0:=xxtr0.Ar.xx0;k0:=ff0[1,1];
p:=sqrt(-dAr/k2);zp:=a10*f1[1]+a20*f1[2];if evalf(zp)<0
then p:=-p; print ("p=",p);fi;
Ct:=Transpose(C); xyc:=Ct.<<-k0/(2*p)>, <0>>+<<x0>,
<y0>>;
fsemi1:=k1*Cx[1,1]^2+k2*Cx[2,1]^2+2*p*Cx[1,1]+k0;fver1:=s
implify(fsemi1);
xc:=xyc[1,1];yc:=xyc[2,1];mxc:=<<x-xc>, <y-
yc>>;Cx1:=C.mxc;Cx1:=simplify(Cx1);
fsemi2:=k1*Cx1[1,1]^2+k2*Cx1[2,1]^2+2*p*Cx1[1,1];fver2:=s
implify(fsemi2);rp:=evalf(p);
rCx1:=evalf(Cx1);rk1:=evalf(k1);rk2:=evalf(k2);rfsemi2:=r
k1*rCx1[1,1]^2+rk2*rCx1[2,1]^2+2*rp*rCx1[1,1];
rfver2:=simplify(rfsemi2);
print("fver2",fver2);print("fsemi2",fsemi2);print("rfsemi
2",rfsemi2);print("fver2",fver2);
print("Cx1",Cx1);fi;
end proc;
plotcurv := proc( ) global Cx,Cx1,dA,fx,fy;
if dA <> 0 then fx:=Cx[1,1];fy:=Cx[2,1]; else
fx:=Cx1[1,1];fy:=Cx1[2,1]; fi;

```

```

implicitplot({f=0,fx=0,fy=0}, x=-9..9, y=-9..9); end
proc;
with(plots):
#f:=x^2-x*y-y^2-2*x-4*y-2; f:=2*f; subcurv();plotcurv();
#-----var 29.5-----
#f:=5*x^2+8*x*y+5*y^2-18*x-18*y+9; subcurv();plotcurv();
#f:=4*x^2-4*x*y+y^2-2*x-14*y+7; subcurv(); plotcurv();
1;f:=x^2+x*y+y^2-2*x-3*y-4;subcurv(); plotcurv();
3;f:=x^2-4*x*y+4*y^2-3*x-6*y;subcurv(); plotcurv();

```

1

$$f := x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y - 4$$

$$k1k2, \vec{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}$$

$$k1k2, \vec{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$$

$$rk1rk2, 1.5000000000, 0.5000000000$$

$$\text{"fsemil"}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} x + \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} y \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} x - \frac{5}{6} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} y \right)^2 - \frac{19}{3}$$

"rfsemil",

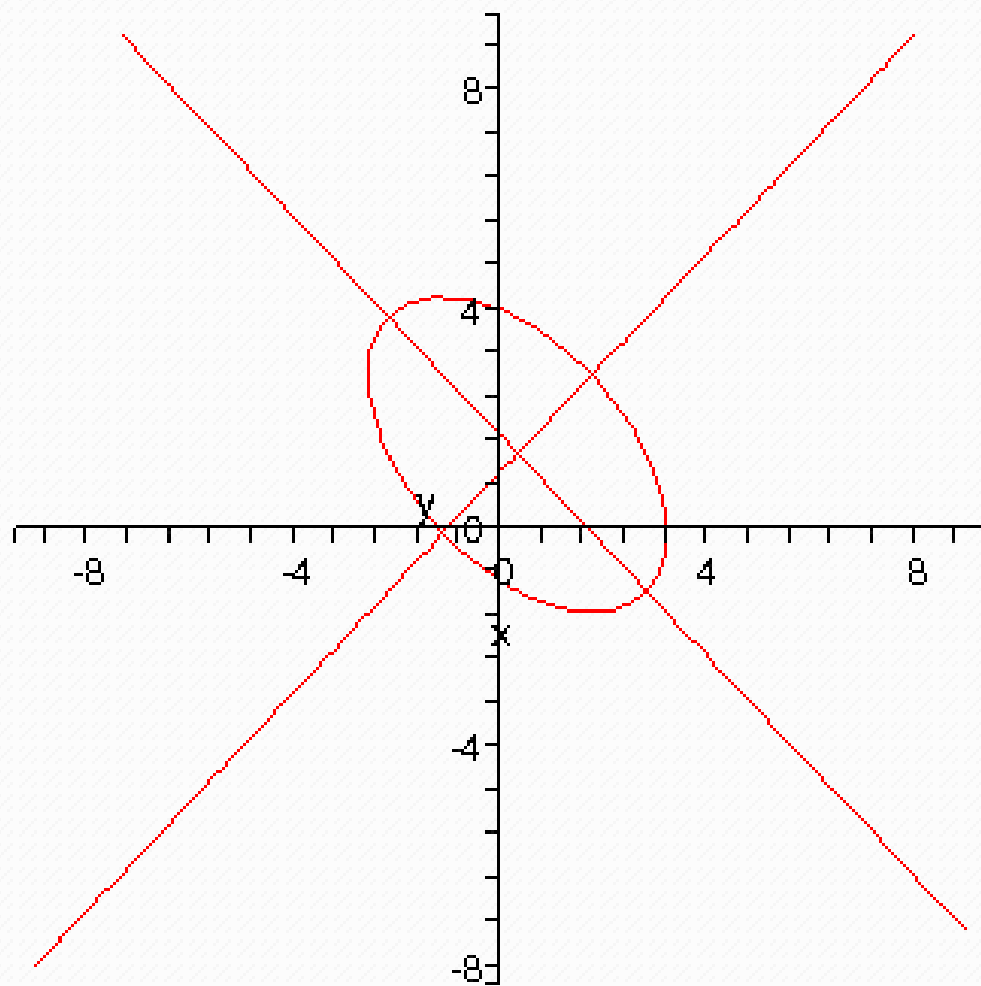
$$0.5000000000 (0.7071067810 x + 0.7071067810 - 0.7071067810 y)^2 \\ + 1.5000000000 (0.7071067810 x - 1.178511302 + 0.7071067810 y)^2 - 6.333333333$$

$$\text{"fver"}, x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y - 4$$

"rfver",

$$0.9999999995 x^2 - 2.0000000000 x + 0.9999999995 xy - 4.0000000000 - 2.9999999999 y \\ + 0.9999999995 y^2$$

$$\text{"Cx"}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sqrt{2} x + \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2} y \\ \frac{1}{2} \sqrt{2} x - \frac{5}{6} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} y \end{bmatrix}$$



3

$$f := x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x - 6y$$

$$\text{"central-}x_0y_0\text{"}, \frac{-9}{2}, -3$$

$$k_1k_2, 5, 0$$

$$k_1k_2, 0, 5$$

$$rk_1rk_2, 5., 0.$$

"semi canon form of parabol"

$$\text{"x0y0"} = \left(-\frac{9}{10}, 0 \right)$$

$$\text{"p"} = \left(-\frac{6}{5}\sqrt{5} \right)$$

$$\text{"fver2"}, x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x - 6y$$

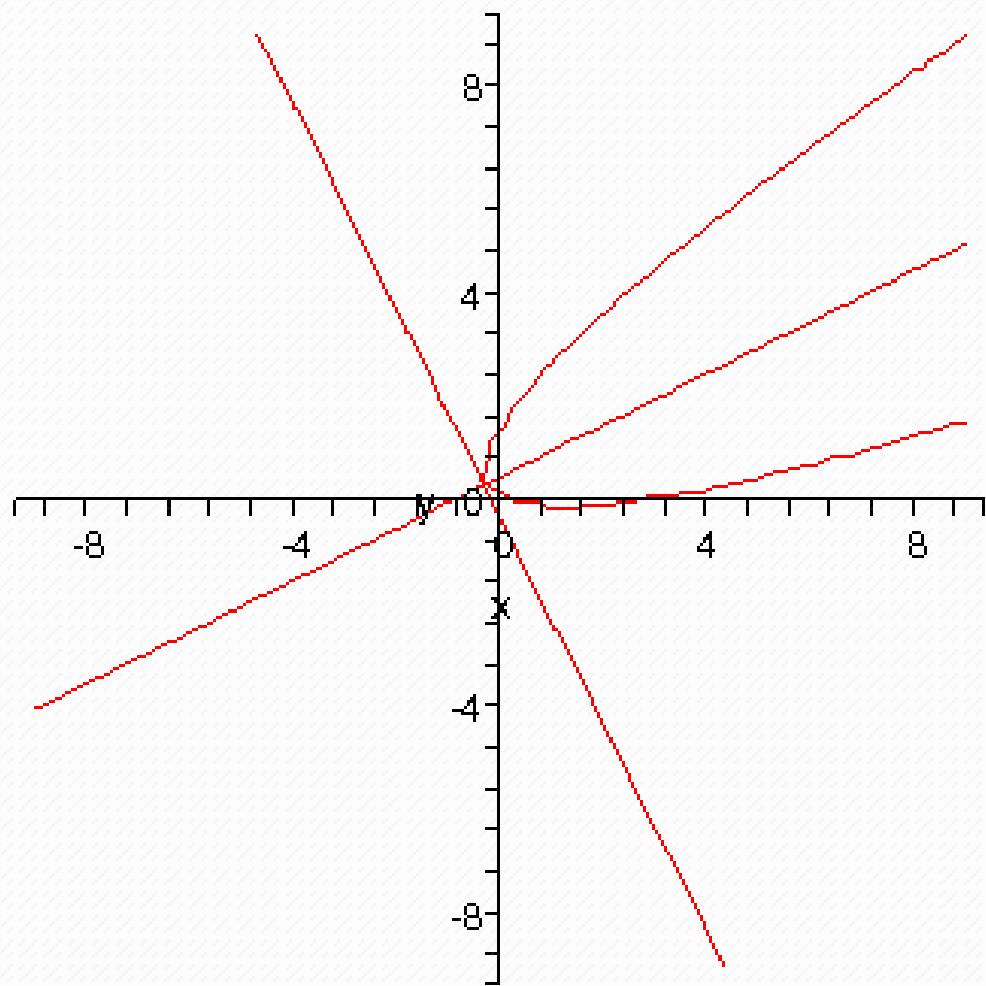
$$\text{"fsemi2"}, 5 \left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}x - \frac{9}{50}\sqrt{5} + \frac{2}{5}\sqrt{5}y \right)^2 - \frac{12}{5}\sqrt{5} \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}x + \frac{27}{400}\sqrt{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}y \right)$$

$$\text{"rfsemi2"},$$

$$-0.8099999992 + 5. \left(-0.4472135954x - 0.4024922359 + 0.8944271908y \right)^2 - 4.799999998x \\ - 2.399999998y$$

$$\text{"fver2"}, x^2 - 4xy + 4y^2 - 3x - 6y$$

$$\text{"Cx1"}, \begin{bmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5}x + \frac{27}{400}\sqrt{5} + \frac{1}{5}\sqrt{5}y \\ -\frac{1}{5}\sqrt{5}x - \frac{9}{50}\sqrt{5} + \frac{2}{5}\sqrt{5}y \end{bmatrix}$$



Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Москва: Наука, 1984 г.
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. Москва: Наука, 1980 г.
3. Ван дер Варден В.Л. Алгебра. Москва: Наука, 1979 г.
4. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. Москва: Наука, 1978 г.

Оглавление гл. 3.

Гл. 3. Теория кривых и поверхностей второго порядка.	39
Введение.	39
§ 1. Элементарная теория кривых второго порядка.	39
1. Кривые как конические сечения.	39
2. Фокальные свойства конических сечений (невыврожденных кривых второго порядка).	40
3. Дирекционное свойство конических сечений.	41
§ 2. Канонические уравнения кривых второго порядка.	42
1. Определение.	42
2. Основные соотношения между параметрами канонических уравнений конических сечений.	42
§ 3. Аффинная теория кривых второго порядка.	43
1. Формулы преобразования.	43
2. Свойства аффинного преобразования.	44
§ 4. Проективная теория кривых второго порядка.	46
§ 5. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.	48
1. Введение.	48
2. Приведение центральной кривой второго порядка к каноническому виду.	49
2.1 Нахождение центра симметрии.	49
2.2 Нахождение осей симметрии кривой (собственных векторов и собственных значений суженной матрицы A).	50
2.3 Переход от старой системы координат к новой.	51
2.4 Каноническое уравнение центральной кривой.	52
2.5 Построение центральной кривой второго порядка.	52
3. Приведение параболы и вырождающихся кривых второго порядка к каноническому виду.	53
4. Классификация вырожденных кривых второго порядка.	55
§ 6. Поверхности второго порядка.	56
1. Приведение к каноническому виду.	56
2. Классификация центральных поверхностей второго порядка.	57
3. Нецентральные поверхности (параболоиды).	57
4. Вырождающиеся поверхности второго порядка.	58
§ 7. Программа приведения кривых второго порядка к каноническому виду.	58
1. Описание алгоритма.	58
2. Некоторые величины, используемые в подпрограмме.	59
3. Текст программы приведения кривой второго порядка к каноническому виду.	60
Литература.	66