МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНО УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ (МИРЭА)

*Михин М.Н.*

# Теория вероятностей

- Случайные события и их вероятности
- Классическая и геометрическая вероятности
- Условная вероятность. Независимость событий
- Схема независимых испытаний
- Случайные величины и их распределения
- Числовые характеристики случайных величин

Москва – 2016

## Оглавление

# Введение

Цель данного пособия помочь студенту самостоятельно подготовиться к выполнению контрольных работ. Перед каждой рассматриваемой задачей даётся тот теоретический материал, который необходим для её решения. Если студент ранее овладел необходимым теоретическим материалом, то вводную часть каждой задачи он может опустить и перейти непосредственно к решению задачи. Необходимо отметить, что приведённый теоретический материал достаточно полно охватывает курс указанного предмета.

# Глава 1. Случайные события и их вероятности

## *§1. События. Действия с событиями*

***Элементарным событием*** $\omega$ называется простейший неделимый исход некоторого опыта. ***Пространством элементарных событий*** (обозначается $\Omega$) называется множество всех элементарных исходов.

**Пример 1.** Рассмотрим следующие элементарные события:

- О — появление «герба» при подбрасывании монеты;
- Р — появление «решки» при подбрасывании монеты.

Тогда пространством элементарных событий будет являться:

- $\Omega = \{О, Р\}$ — если монета подбрасывалась один раз;
- $\Omega = \{(О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р)\}$ — если монета подбрасывалась два раза или подбрасывались две монеты. ●

**Пример 2.** При подбрасывании игрального кубика элементарными исходами является число выпавших очков, т.е. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ●

***Случайным событием*** $A$ (или просто ***событием*** $A$) называется любое подмножество множества $\Omega$.

Элементарные события, принадлежащие подмножеству $A$, называются ***благоприятствующими*** событию $A$.

Событие называется ***достоверным***, если в результате опыта оно непременно должно произойти. Достоверное событие обозначают символом $\Omega$, так как оно состоит из тех же элементарных исходов, что и пространство элементарных исходов.

Событие называется ***невозможным***, если в результате опыта оно не может произойти. Невозможное событие обозначают символом $\varnothing$.

**Пример 3.** Событие, состоящее в появлении менее 7 очков при бросании игрального кубика, является достоверным.

**Пример 4.** Событие, состоящее в появлении 7 очков при бросании игрального кубика, является невозможным.

Событие *A* **влечёт** событие *B* (*A* является подмножеством множества *B*), если из того, что происходит событие *A*, следует, что происходит событие *B*; записывают $A \subseteq B$.

Если одновременно $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то в этом случае события *A* и *B* называют равносильными, при этом пишут $A = B$.

**Пример 5.** Если $A$ — событие, состоящее в том, что взятое наудачу изделие первого сорта, а *B* — изделие качественное (не брак), то в том событие *A* влечёт событие *B*: $A \subseteq B$.●

События $H_1, H_2, ..., H_n$ называют ***несовместными***, если при наступлении одного из событий, остальные $n-1$ события в данном испытании наступить уже не могут.

**Пример 6.** Если при бросании игральной кости выпала грань «2», то это означает, что при том же бросании не могла появиться грань «4». ●

События $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют **полную группу несовместных событий (являются гипотезами),** если они удовлетворяют двум условиям:

- их сумма является пространством элементарных событий, т.е. выполняется соотношение $\sum_{k=1}^{n} H_k = \Omega$;
- события попарно несовместны, т.е. $H_i \cdot H_j = \varnothing \quad (i \neq j)$.

**Пример 7.** При однократном бросании кубика полная группа попарно несовместимых событий состоит из событий $H_1, H_2, ..., H_6$, которые состоят соответственно в выпадении 1,2,3,4,5,6 очков соответственно. ●

**Операции над событиями**

***Суммой событий*** $A$ и $B$ называется событие $C = A + B = A \bigcup B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий $A$ или $B$. Элементарными исходами суммы событий $A + B$ являются элементарные исходы, принадлежащие хотя бы одному из событий $A$ и $B$.

***Произведением событий*** $A$ и $B$ называется событие $C = AB = A \bigcap B$, состоящее в совместном (одновременном) наступлении этих событий. Элементарными исходами произведения событий $AB$ являются те элементарные исходы, которые одновременно принадлежат событиям $A$ и $B$.

***Разностью событий*** $A$ и $B$ называется событие $C = A - B = A \setminus B$, состоящее в том, что событие $A$ произошло, а событие $B$ не произошло. Элементарными исходами разности событий $A \setminus B$ являются те элементарные исходы события $A$, которые не принадлежат событию $B$.

Событие, состоящее в том, что событие $A$ не происходит, называется ***противоположным*** событию $A$ и обозначается $\overline{A}$. Элементарными исходами противоположного события $\overline{A}$ являются те элементарные исходы, которые не принадлежат событию $A$.

**Свойства операций над событиями:**

- $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$;
- $(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$, $(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- $A + A = A$, $A \cdot A = A$;
- $A + \Omega = \Omega$, $A \cdot \Omega = A$;
- $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$;
- $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$;
- $A - B = A\overline{B}$;
- $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$.

## *§2. Общее определение и свойства вероятности*

**Вероятностью *P*(*A*) события** *A* называется функция, определённая на пространстве элементарных исходов и удовлетворяющая трём условиям:

- $P(A) \geq 0$ для каждого события $A$ (условие неотрицательности);
- $P(\Omega) = 1$ (условие нормировки);
- Если $B \cdot C = \varnothing$, то $P(B + C) = P(B) + P(C)$ (теорема сложения для несовместных событий).

**Свойства вероятности:**

1. Вероятность события $\overline{A}$, противоположного событию $A$, равна

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

**Доказательство.** $1 = P(\Omega) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$, откуда следует, что

$P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A})$. ■

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е. $P(\varnothing) = 0$.

**Доказательство.**

$P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) \quad \Rightarrow \quad P(\varnothing) = 0$.■

3. Если событие $A$ влечёт за собой событие $B$ $(A \subseteq B)$, то

$P(A) \leq P(B)$.

**Доказательство.** Представим событие $B$ в виде суммы двух несовместных событий: $B = A + \overline{A}B$, $A \cdot (\overline{A} \cdot B) = \varnothing$.

Используя теорему сложения для несовместных событий, получим:

$P(B) = P(A + (\overline{A} \cdot B)) = P(A) + P(\overline{A}B) \geq P(A)$. ■

4. Для каждого события $A$, справедливо неравенство

$0 \leq P(A) \leq 1$.

**Доказательство.** Данное свойство следует из условий нормировки и теоремы сложения для несовместных событий. ■

# Глава 2. Классическая и геометрическая вероятности

## *§1. Классическое определение вероятности*

Пусть пространство $\Omega$ состоит из $n$ всевозможных равнозначных исходов $\omega_1,\ldots\omega_n$. Теперь каждому элементарному исходу $\omega_i$ $(i=1,2,...,n)$ поставим в соответствие вероятность $P(\omega_i)=\dfrac{1}{n}$ .

Далее рассмотрим некоторое событие $A$, которому соответствует ровно $m$ (благоприятных) элементарных исходов $\omega$.

Положим

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (2.1.1)$$

Таким образом, в классической схеме вероятность любого события $A$ определяется как отношение числа $m$ благоприятных для события $A$ элементарных исходов к общему числу элементарных исходов $n$.

**Пример 1**. В урне находятся 3 белых и 5 чёрных шаров. Из урны случайным образом вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый (событие $A$).

❍ **Решение.** Число всевозможных исходов равно $n=3+5=8$.

Число благоприятных исходов равно числу белых шаров, т.е. $m = 3$.

Таким образом, используя классическое определение вероятности, получаем

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{8}. \bullet$$

**Пример 2.** Имеются две урны: в первой — $a$ белых и $b$ чёрных шаров; во второй — $c$ белых и $d$ чёрных шаров. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми (событие $A$).

❍ **Решение.** Каждый шар из первой урны может комбинировать с каждым шаром из второй урны. Следовательно, число всевозможных исходов:

$n = (a+b)(c+d)$.

Аналогично, число благоприятных исходов: $m = ac$.

Следовательно, используя классическое определение вероятности, получаем:

$$P(A) = \frac{ac}{(a+b)(c+d)}. \;●$$

**Пример 3.** Из колоды карт (36 листов) наудачу выбирается одна карта. Определить вероятность того, что она окажется королём (событие А).

❍ **Решение.** Число всевозможных исходов равно $n = 36$.

Число благоприятных исходов равно числу королей, т.е. $m = 4$.

Таким образом, используя классическое определение вероятности, получаем:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{9}. \;●$$

## *§2. Применение комбинаторного анализа*

**Теорема.** Из *m* элементов $a_1, \dots, a_m$ и *n* элементов $b_1, \dots, b_n$ можно образовать *mn* пар $(a_i, b_j)$.

**Доказательство.** Составим из этих пар прямоугольную таблицу, состоящую из *m* строк и *n* столбцов, так, чтобы пара $(a_i, b_j)$ стояла на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца. В этом случае каждая пара появляется один и только один раз. Число элементов такой таблицы равно *mn*. ■

**Пример 4.** Найти число всевозможных исходов при бросании двух игральных костей.

❍ **Решение.** Очевидно, что каждый элемент пары принимает шесть значений. Следовательно, существует $6 \cdot 6 = 36$ возможных комбинаций. ●

**Перестановкой** из *n* элементов называется любой упорядоченный набор данных элементов.

**Теорема.** Число различных перестановок из *n* различных элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = n!. \tag{2.2.1}$$

**Доказательство.** Первый элемент можно выбрать *n* способами, второй элемент можно выбрать $n-1$ способами (т.к. один элемент уже выбран), третий — $n-2$ способами и т.д. В итоге получим:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = \mathrm{n}!. \ \blacksquare$$

**Размещением** из *n* элементов по *m* называется любой упорядоченный набор, содержащий *m* элементов, выбранных из *n* исходных элементов.

**Теорема.** Число размещений из *n* различных элементов по *m* вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{2.2.2}$$

**Доказательство.** Данная теорема доказывается аналогично предыдущей теореме.

**Сочетанием** из *n* элементов по *m* называется любой *неупорядоченный* набор, содержащий *m* элементов, выбранных из *n* исходных элементов.

**Теорема.** Число сочетаний из *n* различных элементов по *m* вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \tag{2.2.3}$$

**Доказательство.** Число сочетаний отличается от числа размещений только тем, что входящие в него элементы неупорядочены; *m* различных элементов можно упорядочить $m!$ способами. Следовательно, каждому размещению соответствует $m!$ сочетаний. Отсюда:

$$A_n^m = C_n^m m! \text{ или } C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \blacksquare$$

Способ выбора, приводящий к перестановкам, размещениям и сочетаниям, называется выборкой без возвращения.

Рассмотрим выборку с возвращением. В этом случае каждый взятый элемент из общей совокупности возвращается обратно. Таким образом, один и тот же элемент может быть выбран несколько раз.

**Теорема.** Число выборок $k$ элементов с возвращением из $n$ различных элементов равно $n^k$.

**Доказательство.** Первый элемент может быть выбран $n$ способами, второй также $n$ способами и т.д. В итоге

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k. \blacksquare$$

**Пример 5.** (Гипергеометрическое распределение). Предположим, что имеются $n$ шаров: $n_1$ красных и $n_2 = n - n_1$ чёрных. Случайным образом выбираются $r$ шаров. Найти вероятность того, что выбранная группа будет содержать ровно $k_1$ красных и $k_2 = r - k_1$ чёрных шаров (событие $A$).

❍ **Решение.** Число способов, которыми можно выбрать, $k_1$ красных шаров из $n_1$ шаров ровно $C_{n_1}^{k_1}$. Аналогично, число способов, которыми можно выбрать $k_2$ чёрных шаров из $n_2$ равно $C_{n_2}^{k_2} = C_{n-n_1}^{r-k_1}$. Так как любой выбор красных шаров может комбинировать (составлять пару) с любым выбором чёрных шаров, имеем число благоприятных исходов, равное $C_{n_1}^{k_1} C_{n-n_1}^{r-k_1}$.

Число всевозможных исходов равно $C_n^r$.

Используя классическое определение вероятности, получаем:

$$P(A) = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n-n_1}^{r-k_1}}{C_n^r}. \bullet$$

**Теорема.** Пусть $r_1,\ldots,r_k$ — натуральные числа, такие, что $r_1+r_2+\ldots+r_k=n$. Число способов, которыми множество из $n$ элементов можно разделить на $k$ упорядоченных подмножеств, из которых первое подмножество содержит $r_1$ элементов, второе $-\,r_2$ элементов и т.д., равно

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}\,. \qquad (2.2.4)$$

**Доказательство.** Сначала необходимо выбрать $r_1$ элементов из $n$; из оставшихся $n-r_1$ необходимо выбрать $r_2$ элементов и т.д. Получаем:

$$C_n^{r_1}C_{n-r_1}^{r_2}\ldots C_{n-r_1-\ldots-r_{k-1}}^{r_k}=\frac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\cdots\frac{(n-r_1-\ldots-r_{k-1})!}{r_k!(n-r_1-\ldots-r_k)!}=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdot\ldots\cdot r_k!}.\blacksquare$$

**Пример 6.** Колода карт (52 листа) делится поровну между четырьмя игроками. Найти вероятность того, что каждый игрок имеет туза (событие $A$).

❍ **Решение.** Используя (2.2.4), найдём число всевозможных исходов:

$$n=\frac{52!}{13!13!13!13!}=\frac{52!}{(13!)^4}.$$

Найдём число благоприятных исходов. Четыре туза можно упорядочить 4! способами, и каждый порядок представляет одну возможность получения одного туза каждым игроком. Оставшиеся 48 карт, согласно (2.2.4), можно распределить $\frac{48!}{12!12!12!12!}=\frac{48!}{(12!)^4}$ способами. Таким образом, число благоприятных исходов равно $m=4!\frac{48!}{(12!)^4}$.

Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A)=4!\frac{48!}{(12!)^4}:\frac{52!}{(13!)^4}\approx 0{,}105. \bullet$$

## §3. Геометрическое определение вероятности

Пусть теперь рассматривается непрерывная вероятностная схема, т.е. пространство элементарных исходов представляет собой некоторую ограниченную область (отрезок, круг, шар и т.д.) $k$-мерного пространства (прямой, плоскости, трёхмерного пространства и т.д.).

Пусть $\Omega$ — некоторая область, имеющая меру $mes(\Omega)$ (длину, площадь, объём и т.д.) такую, что $0 < mes(\Omega) < \infty$. Пусть внутри области $\Omega$ находится область $A$.

***Определение.*** **Геометрической вероятностью** называют отношение меры области $A$ к мере области $\Omega$:

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

В качестве меры, как правило, выбирают:

- на прямой — длину,
- на плоскости — площадь,
- в пространстве — объём.

**Пример 8.** (Задача о встрече.) Двое друзей договорились встретиться в определённом месте между 12 часами и часом. Пришедший первый ждёт другого в течение 20 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что друзья встретятся.

❍ **Решение.** Обозначим момент прихода одного из друзей через $x$, а момент прихода другого друга через $y$. На плоскости, в качестве единицы масштаба, выберем минуту. Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 60. Для того, чтобы встреча произошла необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|x - y| \le 20$.

Исходы, благоприятствующие встрече, изображены в заштрихованной области (рис. 2.1).

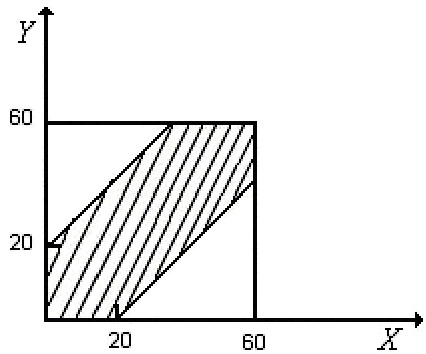

Рис. 2.1

Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной области к площади всего квадрата $p = \dfrac{60^2 - 40^2}{60^2} = \dfrac{5}{9}$. ●

**Пример 9.** В круг радиуса $R = 1$ случайным образом бросается точка. Найти вероятность того, что точка попадёт в круг радиуса $r = \frac{1}{2}$ с тем же центром (рис. 2.2).

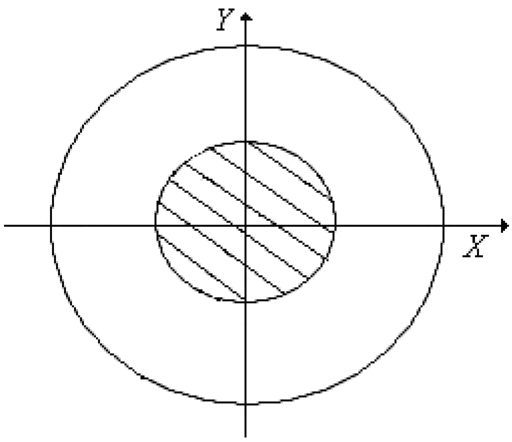

Рис. 2.2

❍ **Решение.** Первое решение.

Пусть $A$ — событие, состоящее в попадании точки в малый круг. Определим вероятность $P(A)$ как отношение площади малого круга к площади большего:

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}.$$

Второе решение. Рассмотрим полярную систему координат, в которой положение точки определяется углом $\varphi$ между радиус-вектором точки и осью $OX$ и расстоянием $\rho$ от точки до начала координат. Поскольку точки, равностоящие от центра, все либо одновременно принадлежат меньшему кругу, либо нет, то вероятность попадания в этот круг равна отношению радиусов: $P(A)=\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{2}$.

Итак, мы получили в одной и той же задаче два разных ответа. Причина заключается в том, что понятие геометрической вероятности не инвариантно относительно преобразований рассматриваемой области $\Omega$ и зависит от того, как задана мера $mes(A)$.

Отметим, что для нас предпочтительнее первый способ решения. ●

## *Для самостоятельного решения*

1. В магазин поступило 25 холодильников, пять из них бракованные. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность того, что он будет исправен.
2. На 6-местную скамейку случайным образом садятся 6 человек, среди которых два приятеля — Вася и Игорь. Какова вероятность того, что Вася и Игорь окажутся вместе?
3. За круглый стол случайным образом садятся 8 человек, среди которых два приятеля — Вася и Игорь. Какова вероятность того, что Вася и Игорь окажутся рядом?
4. Студент пришёл на экзамен, зная лишь 20 из 30 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент ответит на все вопросы.
5. Бросаются три игральных кубика. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков меньше 7.
6. Из колоды карт (32 листа) случайным образом взяли 5 карт. Найти вероятность того, что этими картами оказались: туз, король, дама, валет, десятка.
7. Из колоды карт (36 листов) случайным образом берут 4 карты. Найти вероятность того, что среди них три короля.
8. Группа туристов из 12 юношей и 4 девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе четырёх человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся двое юношей и две девушки?
9. На отрезок [0,1] случайным образом помещены две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними не превосходит 0,7.
10. На отрезок [0,1] случайным образом помещены две точки. Найти вероятность того, что расстояние между ними более 0,2.

# Глава 3. Условная вероятность. Независимость событий. Формулы полной вероятности и Байеса

## *§1. Условная вероятность*

Рассмотрим следующий пример. Бросаются две игральные кости. Найдём вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8, если заранее известно, что сумма выпавших очков есть чётное число. Всевозможные исходы запишем в виде таблицы 3.1:

**Таблица 3.1**

| 2-ой кубик / 1-ый кубик | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Из таблицы видно, что число всевозможных исходов равно 36, но число исходов, удовлетворяющих условию, при которых сумма очков есть чётное число, равно 18. Из них ровно в 5 исходах сумма очков равна 8. Пользуясь классическим определением вероятности, находим, что искомая вероятность равна $p = \frac{5}{18}$.

Заметим, что безусловная вероятность того, что сумма выпавших очков, равная 8, равна $\frac{5}{36}$, т.е. задание дополнительного условия может повлиять на вычисление вероятности.

Найдём условную вероятность $P(A|H)$ события $A$ при условии, что событие $H$ уже произошло. Для простоты рассмотрим классическую схему. Естественно положить, что данная вероятность есть отношение числа исходов $m_{AH}$, благоприятных совместному (одновременному) осуществлению событий *A* и *H*, к числу исходов, благоприятных событию *H*, т.е.

$$P(A|H)=\frac{m_{AH}}{m_H}.$$

Разделив числитель и знаменатель на число всевозможных исходов $n$, получим:

$$P(A|H)=\frac{m_{AH}/n}{m_H/n}=\frac{P(AH)}{P(H)}.$$

Последняя формула может служить общим определением условной вероятности при аксиоматическом подходе.

**Условной вероятностью** $P(A|H)$ события *A* при условии, что событие *H* уже произошло, называется отношение вероятности совместного (одновременного) осуществления событий *A* и *H* к вероятности события *H*:

$$P(A|H)=\frac{P(AH)}{P(H)}. \qquad (3.1.1)$$

**Пример 1.** При трёхкратном подбрасывании монеты выпало два «герба». Найти условную вероятность того, что при втором подбрасывании выпал «герб».

❍ **Решение**. Рассмотрим следующие события:

*H* — при трёхкратном подбрасывании выпало два «герба»;

*A* — при втором подбрасывании выпал «герб».

Событию *AH* соответствует два исхода: Г – Г – Р, Р – Г – Г.

Число всевозможных исходов при трёхкратном подбрасывании монеты $n=2^3=8$. Отсюда находим:

$$P(AH)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

Аналогично, событию *H* соответствует три исхода, следовательно, вероятность условия равна

$$P(H)=\frac{3}{8}.$$

Далее, применяя (3.1.1), получаем искомую вероятность

$$P(A|H)=\frac{P(AH)}{P(H)}=\frac{2}{3}. \bullet$$

## §2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

**Теорема сложения вероятностей для двух событий.** Вероятность суммы двух событий $A$ и $B$ вычисляется по формуле:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (3.2.1)$$

**Доказательство.** Воспользуемся очевидными равенствами:

$A+B=A+(B-A)$ и $B=(B-A)+AB$.

При этом $A(B-A)=\varnothing$ и $(B-A)AB=\varnothing$, т.е. события $A$ и $(B\setminus A)$, а также $B-A$ и $AB$, несовместные (непересекающиеся).

Таким образом, из аксиомы сложения находим:

$P(A+B)=P(A)+P(B-A)$ и $P(B)=P(AB)+P(B-A)$.

Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$P(A+B)-P(B)=P(A)-P(AB).$$

Отсюда получаем:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \blacksquare$$

**Теорема сложения вероятностей для нескольких событий.** Вероятность суммы нескольких событий выражается формулой:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{\substack{i\neq j\\ i,j=1}}^{n}P(A_iA_j)+\sum_{\substack{i\neq j\neq k\\ i,j,k=1}}^{n}P(A_iA_jA_k)-\ldots+(-1)^n P(A_1A_2\ldots A_n). \qquad (3.2.2)$$

**Теорема умножения вероятностей.** Вероятность произведения двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при наличии первого:

$$P(AH)=P(H)P(A|H)=P(A)P(H|A). \qquad (3.2.3)$$

**Доказательство**. Для доказательства (3.2.3) достаточно умножить обе части равенства (3.1.1) на вероятность условия.

**Теорема умножения вероятностей для нескольких событий.**

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 A_2 \ldots A_{n-1}). \qquad (3.2.4)$$

**Пример 2.** Бросают две монеты. Рассматриваются два события:

$A$ — выпадение «герба» на первой монете;

$B$ — выпадение «герба» на второй монете.

Найти вероятность события $A \cup \mathrm{B}$.

❍ **Решение.** Очевидно, что пространство элементарных исходов состоит из четырёх исходов: «герб»-«герб», «герб»-«решка», «решка»-«герб», «решка»-«решка».

Применим теорему сложения вероятностей. Очевидно, что

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \text{ и } P(AB) = \frac{1}{4},$$

так как событию $AB$ благоприятствует всего один исход, а число возможных исходов равно 4. Окончательно получим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Заметим, что задачу можно решить с помощью противоположного события. Рассмотрим событие $\overline{A \cup B}$ — выпадение пары «решка»-«решка», тогда

$$P(A+B) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \ \bullet$$

**Пример 3.** В урне $a$ белых и $b$ чёрных шаров. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

❍ **Решение**. Рассмотрим события:

$A$ — первый шар белый;

$B$ — второй шар белый.

Применяя теорему умножения вероятностей, получаем:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}.$$

$P(B|A)=\dfrac{a-1}{a+b-1}$, так как общее число шаров, а также число белых, уменьшилось на 1. ●

**Пример 4.** На семи карточках написаны буквы, образующие слово «телефон». После перестановки карточек наудачу последовательно берут пять из них, и прикладывают справа одну к другой. Найти вероятность образования слова «фенол».

❍ **Решение.** Применим теорему умножения вероятностей для нескольких событий. Вероятность $P(\Phi)$ того, что первой буквой будет «Ф», равна $1/7$. Вероятность $P(E|\Phi)$ того, что второй буквой будет «Е», при условии, что букву «Ф» уже взяли, равна $2/6$ и т.д. В итоге получаем:

$$P(\Phi ЕНОЛ)=P(\Phi)P(E|\Phi)P(Н|\Phi Е)P(О|\Phi ЕН)P(Л|\Phi ЕНО)=$$
$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{1260}.$$

●

**Пример 5**. В урне *a* белых и *b* чёрных шаров. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

❍ **Решение**. Рассмотрим события:

$A_1$ — первый шар белый;

$A_2$ — второй шар белый;

$B_1$ — первый шар чёрный;

$B_2$ — второй шар чёрный;

$C$ — шары разных цветов.

Очевидно, что $C = A_1B_2 + B_1A_2$, причём события $A_1B_2$ и $B_1A_2$ несовместимы. По теореме сложения и по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(C) = P(A_1B_2 \cup B_1A_2) = P(A_1B_2) + P(B_1A_2) = P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) =$$
$$= \frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b-1} + \frac{b}{a+b}\frac{a}{a+b-1} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)}.$$

●

## §3. Независимость событий

События $A$ и $B$ называются **независимыми**, если условная вероятность события $A$ при условии $B$ совпадает с безусловной вероятностью события $A$, т.е.

$$P(A|B) = P(A) . \qquad (3.3.1)$$

События A и B независимы, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (3.3.2)$$

Очевидно, что данные два определения равносильны.

**Пример 6**. Пусть события $A$ и $B$ независимы. Доказать, что независимыми являются пары событий $\overline{A}$ и $B$, $A$ и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

❍ **Решение.** Применяя определение независимости событий, и используя вероятность противоположного события, имеем

$$P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - P(B) = P(\overline{B}), \text{ т.е. } P(\overline{B}|A) = P(\overline{B});$$

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cdot\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A\cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(B)} =$$
$$= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)}{1 - P(B)} = 1 - P(A) = P(\overline{A}), \text{ т.е. } P(\overline{A}|\overline{B}) = P(\overline{A});$$

$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = P(\overline{A}), \text{ т.е. } P(\overline{A}|B) = P(\overline{A}). \ ●$$

**Пример 7**. Зависимы или независимы несовместные события.

❍ **Решение.** Пусть события $A$ и $B$ несовместные, т.е. $AB = \varnothing$, причём $P(B) \neq 0$. Тогда $P(A|B) = 0$, т.к. события не пересекаются. Следовательно $A$ и $B$ зависимы. Таким образом, несовместные события зависимы. ●

**Пример 8**. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются следующие события:

$A$ — появление туза;

$B$ — появление карты красной масти;

$C$ — появление бубнового туза.

Зависимы или независимы следующие пары событий: 1) $A$ и $B$, 2) $B$ и $C$, 3) $A$ и $C$?

❍ **Решение.**

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $P(A|B) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$, следовательно, события независимы;

$P(C) = \frac{1}{52}$, $P(C|B) = \frac{1}{26}$, следовательно, события зависимы;

$P(C) = \frac{1}{52}$, $P(C|A) = \frac{1}{4}$, следовательно, события зависимы. ●

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ **независимы в совокупности**, если для всех $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots \le i_m \le n$, $m \le n$, выполнено равенство

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} P\left(A_{i_k}\right).$$

**Замечание.** Из попарной независимости событий $A_i$ и $A_j$ ($i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$) не следует, что события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы в совокупности.

**Пример 9**. Пусть эксперимент состоит в выборе одного из четырёх шаров. Пусть три из них занумерованы цифрами 1, 2, 3, а на четвёртом шаре имеются все эти цифры. Обозначим через $A_i$ $(i=1,2,3)$ событие, состоящее в том, что на выбранном шаре имеется цифра *i*. Зависимы ли события $A_1$, $A_2$ и $A_3$.

❍ **Решение.** Так как, каждая цифра встречается дважды, то

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Так как две различные цифры присутствуют только на одном шаре, то

$$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_1A_3)=\frac{1}{4},$$

следовательно, события $A_1$, $A_2$ и $A_3$ попарно независимы.

Все три различные цифры присутствуют только на одном шаре

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}.$$

Таким образом, получаем, что события $A_1$, $A_2$ и $A_3$ зависимы в совокупности, в то время как они являются попарно независимыми. ●

## *§4. Формула полной вероятности*

Пусть события $H_1,\ldots,H_n$ образуют **полную группу несовместных событий (являются гипотезами),** т.е. они удовлетворяют двум требованиям:

- они попарно несовместны, т.е. $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$;
- в результате опыта ровно одно из событий обязательно должно произойти, т.е. $H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega$.

Пусть имеется некоторое событие $A$ и известны вероятности $P(H_1),\ldots,P(H_n)$ и условные вероятности $P(A|H_1),\ldots,P(A|H_n)$. Тогда вероятность $P(A)$ вычисляется по **формуле полной вероятности**:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+\ldots+P(H_n)P(A|H_n). \qquad (3.4.1)$$

**Пример 10**. Имеются две урны: в первой $a$ белых и $b$ чёрных шаров; во второй $c$ белых и $d$ чёрных шаров. Из первой урны во вторую наудачу перекладывают один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

❍ **Решение.** Пусть искомое событие $A$ — вынут белый шар. Рассмотрим следующие гипотезы:

$H_1$ — переложен белый шар;

$H_2$ — переложен чёрный шар.

Очевидно, что

$$P(H_1)=\frac{a}{a+b}, \qquad P(H_2)=\frac{b}{a+b};$$

$$P(A|H_1)=\frac{c+1}{c+d+1}, \qquad P(A|H_2)=\frac{c}{c+d+1}.$$

Теперь по формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{a}{a+b}\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}\frac{c}{c+d+1}.$$ ●

**Пример 11**. Среди 30 экзаменационных билетов: 25 «хороших» и 5 «плохих». Какова вероятность, отвечая вторым, взять «хороший» билет?

❍ **Решение.** Пусть искомое событие $A$ — второй отвечающий взял «хороший» билет. Рассмотрим следующие гипотезы:

$H_1$ — первый отвечающий взял «хороший» билет;

$H_2$ — первый отвечающий взял «плохой» билет.

Очевидно, что

$$P(H_1)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}, \quad P(H_2)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6};$$

$$P(A|H_1)=\frac{24}{29}, \quad P(A|H_2)=\frac{25}{29}.$$

По формуле полной вероятности, получим:

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{29}+\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{29}=\frac{5}{6}.$$ ●

## §5. Формула Байеса

Пусть имеется полная группа несовместных событий $H_1,\ldots,H_n$. Требуется найти вероятность события $H_i$, если известно, что событие $A$ произошло.

По определению условной вероятности (3.4.1), имеем:

$$P(A|H_i)=\frac{P(AH_i)}{P(A)}.$$

Далее, применяя теорему умножения вероятностей $P(AH_i)=P(H_i)P(A|H_i)$, получаем

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}. \qquad (3.5.1)$$

Последняя формула называется формулой Байеса или формулой гипотез (события $H_1,\ldots,H_n$ называют ещё гипотезами).

Если после опыта, который заканчивается появлением события $A$, производится ещё один опыт, в котором появляется или не появляется событие $B$, то условная вероятность этого последнего события вычисляется по формуле полной вероятности, в которую подставлены не прежние вероятности гипотез $P(H_i)$, а новые $P(H_i|A)$:

$$P(B|A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i|A)P(B|H_iA). \qquad (3.5.2)$$

**Пример 12**. Имеются три урны: в первой — $a$ белых и $b$ чёрных шаров; во второй — $c$ белых и $d$ чёрных шаров, в третьей — $k$ белых шаров. Выбирается наугад урна и из неё вынимается шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что этот шар вынут из первой, второй или третьей урны.

❍ **Решение.** Пусть искомое событие $A$ — вынутый шар белый. Рассмотрим следующие гипотезы:

$H_1$ — выбрана первая урна;

$H_2$ — выбрана вторая урна;

$H_3$ — выбрана третья урна.

Очевидно, что:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Условные вероятности равны:

$$P(A|H_1) = \frac{a}{a+b}, \quad P(A|H_2) = \frac{c}{c+d}, \quad P(A|H_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности (3.4.1), находим, что

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) = \frac{1}{3}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{3}\frac{c}{c+d} + \frac{1}{3}1.$$

По формуле Байеса (3.5.1), находим:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{a}{a+b}}{\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1\right)} = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}.$$

Аналогично получаем, что

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}, \; P(H_3|A) = \frac{1}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d} + 1}. \; \bullet$$

## *Для самостоятельного решения*

Слово составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекаются три карточки и складываются в ряд друг за другом в порядке появления. Определить вероятность получить слово «так» из букв разрезной азбуки слова «статистика».

В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара. Во второй — 2 белых и 3 чёрных. Из первой во вторую кладут два шара. Затем из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что он чёрный.

Трое рабочих изготавливают однотипные детали. Первый рабочий изготовил 40 деталей, второй — 35, третий — 25. Вероятность брака у рабочих составляет 0,03; 0,02 и 0,01 соответственно. Найти вероятность того, что наугад выбранная деталь оказалась бракованной.

Первый стрелок попадает цель с вероятностью $p_1 = 0{,}9$, второй с вероятностью $p_2 = 0{,}8$, а третий с вероятностью $p_1 = 0{,}6$. При одном попадании цель будет уничтожена с вероятностью 0.6, при двух попаданиях с вероятностью 0.7, при трёх с вероятностью 1. Найти вероятность того, что цель была поражена.

Двое рабочих изготавливают однотипные детали. Первый рабочий изготовил 45 деталей, второй — 35. Вероятность брака у рабочих составляет 0,02 и 0,01 соответственно. Найти вероятность того, что наугад выбранная деталь не оказалась бракованной.

Имеются 3 урны состава I (по 3 белых, 4 чёрных и 5 красных шаров), 4 урны состава II (по 5 белых, 3 чёрных и 7 красных шаров) и 2 урны состава III (по 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров). Случайным образом была выбрана урна, из которой случайным образом извлекли шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что была выбрана урна состава II.

## Глава 4. Схема независимых испытаний. Схема Бернулли

### *§1. Формула Бернулли*

Повторные независимые испытания называются **испытаниями Бернулли**, если каждое испытание имеет только два исхода, и вероятности исходов остаются неизменными для всех испытаний.

Обычно эти две вероятности обозначаются через $p$ и $q$, исход с вероятностью $p$ называют «успехом» и обозначают символом 1, а второй – «неудачей» и обозначают символом 0. Очевидно, что $p$ и $q$ должны быть неотрицательными и должно выполняться равенство

$$p+q=1. \qquad (4.1.1)$$

Пространство элементарных исходов каждого отдельного испытания состоит из двух исходов 1 и 0. Очевидно, пространство элементарных исходов $n$ испытаний Бернулли содержит $2^n$ последовательностей из $n$ символов 1 и 0. Так как испытания независимы, то вероятности перемножаются, т. е. вероятность любой конкретной последовательности есть произведение, полученное при замене символов 1 и 0 вероятности на $p$ и $q$ соответственно. Таким образом, вероятность исхода $(11001...0111)$ равна:

$$P(11001...0111)=ppqqp...qppp.$$

Но на практике нас, как правило, интересует не порядок появления успехов в последовательности $n$ испытаний Бернулли, а их общее число.

**Теорема**. Вероятность $p_n(m)$ того, что в $n$ испытаниях Бернулли число успехов равно $m$, вычисляется по формуле

$$p_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (4.1.2)$$

где $p$ — вероятность «успеха», а $q$ — вероятность «неудачи».

**Доказательство.** Событие «в $n$ испытаниях Бернулли число успехов равно $m$ и число неудач — $n-m$» содержит столько элементарных исходов, сколько существует способов размещения $m$ символов на $n$ местах, т.е. $C_n^m$**.** А так как вероятность конкретной последовательности, содержащей $m$ символов 1, равна $p^m q^{n-m}$**,** то в итоге получаем:

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \blacksquare$$

**Пример 1.** Стрелок попадает в мишень с вероятностью $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что в результате пяти независимых выстрелов стрелок попадает:

а) ровно четыре раза;

б) не менее трёх раз.

❍ **Решение.** Для решения данной задачи применим формулу (4.1.2), в которой:

$$n = 5;\ p = 0{,}8;\ q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

а) Число успехов равно $m = 4$. Таким образом, искомая вероятность:

$$p_5(4) = C_5^4 (0{,}8)^4 (0{,}2)^{5-4} = \frac{5!}{4!1!}(0{,}8)^4 (0{,}2)^1 = 0{,}4096.$$

б) Обозначим $p_5(\geq 3)$ — вероятность попадания не менее трёх раз из пяти.

$$p_5(\geq 3) = p_5(3) + p_5(4) + p_5(5) = C_5^3 (0{,}8)^3 (0{,}2)^2 + C_5^4 (0{,}8)^4 (0{,}2)^1 + C_5^5 (0{,}8)^5 (0{,}2)^0 =$$

$$= \frac{5!}{3!2!}(0{,}8)^3 (0{,}2)^2 + \frac{5!}{4!1!}(0{,}8)^4 (0{,}2) + \frac{5!}{5!0!}(0{,}8)^5 = 0{,}9415. \bullet$$

**Пример 2.** Сколько испытаний с вероятностью успеха $p = 0{,}01$ нужно произвести, чтобы вероятность хотя бы одного успеха была не меньше 0,5?

❍ **Решение**. Рассмотрим следующие события:

$A$ — в схеме Бернулли наблюдался хотя бы один успех;

$\overline{A}$ — в схеме Бернулли не наблюдалось ни одного успеха.

Для решения задачи используем формулу (4.1.2), согласно которой вероятность того, что успехов не будет (т.е. число успехов равно нулю), равна:

$$P(\overline{A}) = p_n(0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n .$$

Используя свойство вероятности противоположного события, получаем, что вероятность того, что будет хотя бы один успех, равна:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q^n = 1 - (1-p)^n .$$

Остаётся найти наименьшее целое *n*, для которого выполнено неравенство:

$$1 - (1-p)^n = 1 - (1-0{,}01)^n = 1 - 0{,}99^n > 0{,}5 .$$

Решим последнее неравенство.

$$0{,}99^n < 0{,}5 \Leftrightarrow \ln(0{,}99^n) < \ln(0{,}5) \Leftrightarrow n\ln(0{,}99) < \ln(0{,}5) .$$

Разделив последнее неравенство на $\ln(0{,}99) < 0$, получим

$$n > \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}99)} = 69{,}968 .$$

Наименьшим целым числом *n*, удовлетворяющим последнему неравенству, является $n = 70$. ●

**Пример 3.** Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключён):

а) три партии из четырёх или пять из восьми;

б) не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми.

❍ **Решение.** Так как противники равносильны и ничейный исход партии исключён, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и $p = q = \frac{1}{2}$.

а) Вероятность выигрыша трёх партий из четырёх равна:

$$p_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4},$$

а вероятность выигрыша пяти партий из восьми равна:

$$p_8(5) = C_8^5 p^5 q^{8-5} = \frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}.$$

Так как $\frac{1}{4} > \frac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырёх.

б) Вероятность выигрыша не менее трёх партий из четырёх равна:

$$p_4(\geq 3) = p_4(3) + p_4(4) = C_4^3 p^3 q^{4-3} + C_4^4 p^4 q^{4-4} =$$

$$= \frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16},$$

а вероятность выигрыша не менее пяти партий из восьми равна:

$$p_8(\geq 5) = p_8(5) + p_8(6) + p_8(7) + p_8(8) = C_8^5 p^5 q^3 + C_8^6 p^6 q^2 + C_8^7 p^7 q^1 + C_8^8 p^8 q^0 =$$

$$= \frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{8!}{6!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{8!}{7!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{8!}{8!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{93}{256}.$$

Так как $\frac{93}{256} > \frac{5}{16}$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми. ●

## *§2. Формула Пуассона*

При больших значениях числа испытаний $n$ применение формулы Бернулли (4.1.2) затруднительно. Поэтому применяются простые, но достаточно точные приближённые формулы для вычисления $p_n(m)$. Пусть число испытаний $n$ достаточно «велико», вероятность «успеха» $p$ достаточно «мала». Пусть произведение

$$\lambda = np \qquad (4.2.1)$$

и не мало, и не велико. В таких случаях удобно использовать для вероятности $p_n(m)$ предложенное Пуассоном приближение (формула Пуассона), которое мы сейчас выведем. По формуле Бернулли (4.1.2)

$$p_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m} =$$
$$= \frac{(np)^m}{m!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \ldots \frac{n-m+1}{n} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^{n-m} = \qquad (4.2.2)$$
$$= \frac{\lambda^m}{m!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \ldots \frac{n-m+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m}.$$

При $n \to \infty$ и сделанных выше допущениях очевидны следующие приближения:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda},\ \frac{n-1}{n} \approx 1, \ldots, \frac{n-m+1}{n} \approx 1,\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-m} \approx 1.$$

Следовательно, (4.2.2) примет вид:

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \qquad (4.2.3)$$

а это и есть **формула Пуассона**.

**Замечание.** При выводе формулы Пуассона (4.2.3) использовалось то, что $m$ мало.

**Замечание.** Формула Пуассона (4.2.3) зависит от $m$ и $\lambda$. Значения функции (4.2.2) можно определить следующими способами:

- можно воспользоваться Приложением 1;
- используя функцию *ПУАССОН*(*x;среднее;интегральная*) из EXCEL; в которой аргумент $x$ равен числу «успехов» $m$, аргумент «среднее» равен $\lambda$, аргумент «интегральная» должен равняться 0;
- используя функцию *dpois(k, l)* из MATHCAD, в которой $k = m$ и $l = \lambda$.

**Пример 4.** Найти вероятность того, что среди 1460 человек ровно трое родились 29 февраля.

❍ **Решение.** Вероятность того, что один конкретный человек родился 29 февраля, равна $p = \frac{1}{1461}$, т.к. 29 февраля бывает ровно 1 раз в 4 года.

Далее находим коэффициент $\lambda$:

$$\lambda = np = 1460 \frac{1}{1461} \approx 1.$$

Применяя (4.2.2), получаем:

$$p_{1460}(3) \approx \frac{\lambda^3}{3!}e^{-3} = \frac{e^{-3}}{6}. \; \bullet$$

**Пример 5.** Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность того, что при 5000 выстрелах в цель попало не менее двух выстрелов.

❍ **Решение.** Рассмотрим два противоположных события**:**

$A$ — при 5000 выстрелах в цель попало не менее двух выстрелов;

$\overline{A}$ — при 5000 выстрелах в цель попало менее двух выстрелов.

Найдём вероятность события $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = p_{5000}(< 2) = p_{5000}(0) + p_{5000}(1).$$

В рассматриваемом примере

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5.$$

Используя формулу Пуассона, получим

$$p_{5000}(0) \approx \frac{5^0}{0!}e^{-5} = e^{-5} = 0{,}006738, \quad p_{5000}(1) \approx \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 5e^{-5} = 0{,}03369.$$

Используя свойство вероятности противоположного события, получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - p_{5000}(0) - p_{5000}(1) = 1 - 0{,}006738 - 0{,}03369 = 0{,}9596. \; \bullet$$

## *§3. Формулы Муавра – Лапласа*

Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, $np \to \infty$, $nq \to \infty$, (4.3.1)

то следует применять формулы Муавра – Лапласа: локальную или интегральную.

**Локальная теорема Муавра-Лапласа**. Если в схеме Бернулли $n \to \infty$, то для всех $m$ справедлива локальная формула Муавра-Лапласа:

$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.3.2)$$

Значения функции $\varphi(x)$, которую называют **плотностью нормального распределения** с параметрами (0,1), можно найти одним из следующих способов:

- можно воспользоваться Приложением 2;
- используя функцию *НОРМРАСП(x;среднее; стандартное_откл; интегральная*) из EXCEL; в которой «*среднее*» необходимо положить равным 0, аргумент «*стандартное_откл*» необходимо положить равным 1, аргумент «*интегральная*» должен равняться 0.
- используя функцию *dnorm(x, mu, sigma)* из MATHCAD, в которой $mu = 0$ и $siqma = 1$.

Очевидно, что функция $\varphi(x)$ является чётной. Поэтому при определении $\varphi(x)$ для отрицательных $x$ нужно воспользоваться равенством $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

**Интегральная теорема Муавра-Лапласа**. Если в схеме Бернулли число испытаний $n \to \infty$, то для вероятности $P(m_1 \le S_n \le m_2)$ того, что число успехов $S_n$ заключено в пределах от $m_1$ до $m_2$, справедлива интегральная теорема Муавра-Лапласа:

$$P(m_1 \le S_n \le m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.3.3)$$

Функция $\Phi(x)$, определённая формулой (4.3.3), называется функцией распределения нормального распределения с параметрами $(0,1)$. Значения функции $\Phi(x)$ можно найти одним из следующих способов:

- можно воспользоваться Приложением 3;
- используя функцию *НОРМРАСП(x;среднее; стандартное_откл; интегральная*) из EXCEL; в которой «*среднее*» необходимо положить

равным 0, аргумент «*стандартное_откл*» необходимо положить равным 1, аргумент «*интегральная*» должен равняться 1.

- используя функцию *pnorm(x, mu, sigma)* из MATHCAD, в которой $mu = 0$ и $siqma = 1$.

Функцию $\Phi(x)$ при отрицательных значениях переменной можно определить по формуле $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

**Пример 6.** Симметричную монету бросают 400 раз. Определить вероятность появления герба:

а) от 185 до 210 раз;

б) ровно 200 раз;

в) не менее 200 раз.

❍ **Решение.** Для решения задачи применим локальную и интегральную теоремы Муавра-Лапласа, для которых $n = 400$, т.к. монету подбрасывали 400 раз, $p = q = \frac{1}{2}$, т.к. монета симметрична.

а) Используя интегральную теорему Муавра-Лапласа, получим

$$P(185 \le S_n \le 210) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi\left(\frac{210 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{185 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{210 - 200}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{185 - 200}{\sqrt{100}}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(1) - 1 + \Phi(1{,}5) = 0{,}7745;$$

б) Используя локальную теорему Муавра-Лапласа, получим

$$\mathrm{P}_{400}(200) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) = \frac{1}{10}\varphi\left(\frac{200 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1}{10}\varphi(0) = 0{,}03989;$$

в) Используя интегральную теорему Муавра-Лапласа, получим

$$P_{400}(\ge 200) = P(200 \le S_n \le 400) = \Phi\left(\frac{400 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{200 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{400 - 200}{\sqrt{100}}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 200}{\sqrt{100}}\right) = \Phi(20) - \Phi(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5. \bullet$$

## *Для самостоятельного решения*

Найти вероятность того, что при подбрасывании 9 монет появится хотя бы один герб.

Игральная кость бросается трижды. Определить вероятность того, что, по крайней мере, один раз появится 4 очка?

В круг радиуса $R$ бросают 5 точек. Найти вероятность того, что 3 из них попадут в правильный треугольник, вписанный в круг.

Найти вероятность того, что из ста человек ровно 24 родились летом.

Вероятность наступления события при одном испытании равна 0,25. С помощью формул Лапласа найти вероятность того, что при 500 испытаниях событие наступит: а) 78 раз, б) не более 78 раз.

Вероятность наступления события А при некотором испытании равна 0,5. Произведено 90 испытаний. Какова вероятность того, что: а) событие $A$ наступит 25 раз, б) не менее 25 раз.

Оптовая база снабжает 10 магазинов, от каждого из которых может поступить заявка на очередной день с вероятностью 0,8 независимо от заявок других магазинов. Найти вероятность того, что поступит не менее 9 заявок.

# Глава 5. Случайные величины и их распределения

## *§ 1. Понятие случайной величины*

***Определение*.** **Случайной величиной** $\xi$ называется функция, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу $\omega$ число $\xi = \xi(\omega)$.

**Пример 1.** Случайными величинами является число очков при бросании игральной кости, сумма очков при бросании нескольких игральных костей.

**Пример 2.** Случайной величиной является координата точки, упавшей на отрезок $[0;1]$. В этом случае $\xi(\omega) = \omega$.

В общем случае случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

**Дискретной** называется случайная величина, которая каждому элементарному исходу $\omega$ ставит в соответствие одно из конечного (или в общем случае счётного) набора чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$.

**Непрерывной** называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторую область.

Однако существуют случайные величины, не относящиеся ни к одному из этих типов.

## *§ 2. Функция распределения случайной величины*

***Определение*.** **Функцией распределения (вероятностей)** случайной величины $\xi$ называется функция $F(x)$, значения которой в точке $x$ равно вероятности события $(\xi < x)$:

$$F(x) = P(\xi < x). \qquad (5.2.1)$$

**Свойства функции распределения.**

1. Функция распределения является ограниченной, т.е.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

**Доказательство.** Ограниченность функции распределения следует из того, что функция распределения является вероятностью. ■

2. Функция распределения является неубывающей, т.е. если $x_2 > x_1$, то

$$F(x_2) \ge F(x_1).$$

**Доказательство.** Если $x_2 > x_1$, то событие $(\xi < x_1)$ содержится в событии $(\xi < x_2)$, т.е. $(\xi < x_1) \subset (\xi < x_2)$. Отсюда, по свойству 3 вероятности, имеем

$$P(\xi < x_1) \le P(\xi < x_2),$$

откуда, следует

$$F(x_1) \le F(x_2). \blacksquare$$

3. $F(x)$ обращается в ноль на минус бесконечности, т.е.

$$F(-\infty) = 0.$$

**Доказательство.** Событие $(\xi < -\infty)$ является невозможным событием, следовательно, $P(\xi < -\infty) = 0$. ■

4. $F(x)$ равна единице в плюс бесконечности, т.е.

$$F(+\infty) = 1.$$

**Доказательство.** Событие $(\xi < +\infty)$ является достоверным событием, следовательно, $P(\xi < +\infty) = 1$.

5. Вероятность попадания случайной величины $\xi$ в интервал $[x_1, x_2)$ равна приращению её функции распределения на этом промежутке, т.е.

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

**Доказательство.** При $x_1 < x_2$ событие $(\xi < x_2)$ можно представить как объединение двух непересекающихся событий $(\xi < x_1)$ и $(x_1 \le \xi < x_2)$. Отсюда, используя аксиому сложения, получаем

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \le \xi < x_2),$$
$$P(x_1 \le \xi < x_2) = P(\xi < x_2) - P(\xi < x_1)$$

или, используя определение функции распределения, получаем

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \ \blacksquare$$

6. $F(x)$ непрерывна слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

С помощью функции распределения можно вычислить вероятность события $(\xi \ge x)$:

$$P(\xi \ge x) = 1 - F(x). \qquad (5.2.2)$$

Иногда, чтобы подчеркнуть, кокой именно случайной величине принадлежит функция распределения $F(x)$, к функции распределения приписывают нижний индекс, обозначающий эту случайную величину, т.е.

$$F_\xi(x) = P(\xi < x).$$

Иногда функцией распределения называется вероятность события $(\xi \le x)$. Такое определение ничего не меняет во всех рассуждениях. Единственное изменение касается свойства 6: функция $F(x)$ будет непрерывной справа.

## *§ 3. Дискретные случайные величины*

Как уже говорилось, дискретной называется случайная величина, которая каждому элементарному исходу $\omega$ ставит в соответствие одно из конечного (или в общем случае счётного) набора чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$.

Дискретную случайную величину удобно характеризовать рядом распределения.

**Рядом распределения (вероятностей)** дискретной случайной величины называется таблица (таблица 5.1), состоящая из двух строк: в первой строке перечислены все возможные значения случайной величины, а во второй — вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$ того, что случайная величина $\xi$ примет значение $x_i$.

**Таблица 5.1**

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_i$ | $\dots$ | $x_n$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_i$ | $\dots$ | $p_n$ | $\dots$ |

При этом должно выполняться равенство

$$\sum_i p_i = 1. \tag{5.3.1}$$

Функцию распределения дискретной случайной величины можно определить по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i. \tag{5.3.2}$$

**Пример 3.** Производится один опыт, в результате которого может произойти событие $A$ с вероятностью $p$. Рассмотрим случайную величину $\xi$, равной 1, если событие $A$ произошло, и 0 если событие $A$ не произошло. Для случайной величины $\xi$ ряд распределения и найти её функцию распределения.

❍ **Решение.** Очевидно, что ряд распределения имеет вид:

| $\xi$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $q$ | $p$ |

где $q = 1 - p$.

Пусть $x \le 0$. В этом случае событие $(\xi < x)$ является невозможным, так как случайная величина $\xi$ не принимает значений меньших 0. Отсюда получаем:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = 0.$$

Пусть $0 < x \le 1$. В этом случае событие $(\xi < x)$ совпадает с событием $(\xi = 0)$, следовательно:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(\xi = 0) = q.$$

Пусть $x > 1$. В этом случае событие $(\xi < x)$ является достоверным, следовательно

$$F(x)=\sum_{x_i<x} p_i = P(\xi=0)+P(\xi=1)=q+p=1.$$

Таким образом, функция распределения примет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-p, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

●

**Пример 4.** Рассмотрим схему последовательных независимых испытаний, в каждом из которых с вероятностью $p$ может произойти событие $A$. Рассмотрим случайную величину $\xi$ — число испытаний, которое необходимо произвести, прежде чем событие $A$ произойдёт. Построить ряд распределения случайной величины $\xi$.

❍ **Решение.** Случайная величина $\xi$ может принимать значения $0, 1, \ldots, n, \ldots$. Очевидно, что $\xi=0$, если в первом же испытании произойдёт событие $A$, следовательно:

$$P(\xi=0)=p.$$

$\xi=1$, если в первом испытании событие $A$ не произошло, а во втором испытании событие $A$ произойдёт, следовательно,

$$P(\xi=1)=qp.$$

$\xi=2$, если в первых двух испытаниях событие $A$ не произошло, а в третьем испытании событие $A$ произойдёт, следовательно,

$$P(\xi=2)=qqp=q^2p.$$

Продолжая аналогично данные рассуждения, получим ряд распределения:

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | $\ldots$ | $n$ | $\ldots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $qp$ | $q^2p$ | $\ldots$ | $q^n p$ | $\ldots$ |

●

**Пример 5.** На зачёте студент получил $n=4$ задачи. Вероятность решить правильно каждую задачу $p=0{,}8$. Построить ряд распределения случайной величины $\xi$ — числа правильно решённых задач.

❍ **Решение.** Случайная величина $\xi$ может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Для нахождения вероятности событий $(\xi=k)$ $(k=0,1,2,3,4)$ применим формулу Бернулли:

$$P(\xi=0)=p_4(0)=C_4^0p^0(1-p)^4=(1-0{,}8)^4=0{,}0016,$$

$$P(\xi=1)=p_4(1)=C_4^1p^1(1-p)^3=\frac{4!}{3!1!}(0{,}8)^1(1-0{,}8)^3=0{,}0256,$$

$$P(\xi=2)=p_4(2)=C_4^2p^2(1-p)^2=\frac{4!}{2!2!}(0{,}8)^2(1-0{,}8)^2=0{,}1536,$$

$$P(\xi=3)=p_4(3)=C_4^3p^3(1-p)^1=\frac{4!}{1!3!}(0{,}8)^3(1-0{,}8)^1=0{,}4096,$$

$$P(\xi=4)=p_4(4)=C_4^4p^4(1-p)^0=0{,}8^4=0{,}4096.$$

Таким образом, ряд распределения числа правильно решённых задач примет вид:

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,0016 | 0,0256 | 0,1536 | 0,4096 | 0,4096 |

●

## § 4. Непрерывные случайные величины

Как уже говорилось, непрерывной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют какую-то область. Дадим более строгое определение непрерывной случайной величины.

Случайная величина $\xi$ называется **непрерывной**, если её функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)dy. \qquad (5.4.1)$$

Функция $p(x)$, присутствующая в (5.4.1), называется **плотностью распределения** (вероятностей) случайной величины $\xi$.

Отметим, что все реально встречающиеся плотности распределения являются непрерывными (за исключением, быть может, конечного числа точек) функциями, и, следовательно, для них плотность распределения $p(x)$ представляет собой производную функции распределения $F(x)$, т. е.

$$p(x) = F'(x). \qquad (5.4.2)$$

**Свойства плотности распределения:**

1. Плотность является неотрицательной функцией, т.е. $p(x) \geq 0$.

**Доказательство.** Функция распределения — неубывающая функция. Следовательно, её производная, которая по (5.4.2.) является плотностью, есть неотрицательная функция. ■

2. Вероятность попадания случайной величины $\xi$ в интервал $[x_1, x_2)$ равна определённому интегралу от её плотности в пределах от $x_1$ до $x_2$, т.е.

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(y)dy.$$

**Доказательство.** С одной стороны, по свойству 5 функции распределения

$$P(x_1 \leq \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

с другой стороны, в силу (5.4.2):

$$\int_{x_1}^{x_2} p(y)dy = \int_{x_1}^{x_2} dF(x) = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1).$$

3. Условие нормировки: несобственный интеграл от плотности случайной величины в бесконечных пределах равен единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

**Доказательство**. В силу свойства 2, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1. \blacksquare$$

4. $P(x \le \xi < x + \Delta x) \approx p(x)\Delta x$.

**Доказательство**. Из свойства 2 следует, что вероятность попадания случайной величины на интервал $[x_1, x_2)$ численно равна площади криволинейной трапеции (рис. 5.1).

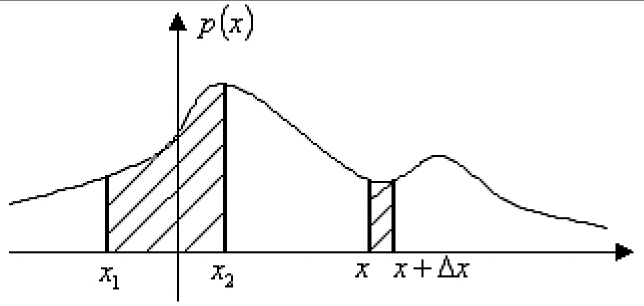

Рис. 5.1

Как видно из рис. 5.1, при $\Delta x \to 0$ вероятность попадания на интервал $[x, x + \Delta x)$ приближённо совпадает с площадью прямоугольника со сторонами $\Delta x$ и $p(x)$. ■

5. Для непрерывных случайных величин $\mathrm{P}(\xi = x) = 0$.

**Доказательство**. Достаточно применить свойство 4, где $\Delta x = 0$. ■

6. Для непрерывных случайных величин свойство 2 можно переписать в виде:

$$\mathrm{P}(x_1 \le \xi < x_2) = \mathrm{P}(x_1 < \xi < x_2) = \mathrm{P}(x_1 < \xi \le x_2) = \mathrm{P}(x_1 \le \xi \le x_2).$$

**Пример 6**. Случайная величина $\xi$ имеет плотность

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

График функции $p(x)$ изображён на рис. 5.2.

Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины $\xi$ и изобразить её график.

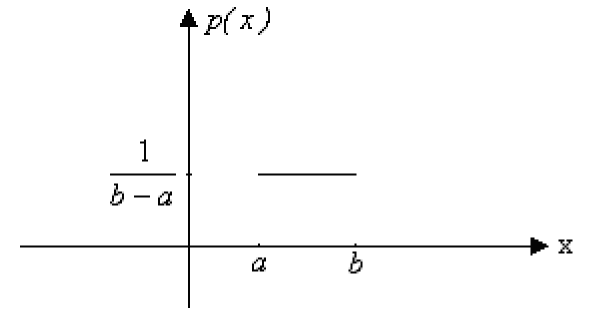

Рис. 5.2

❍ **Решение**. Для решения задачи применим формулу (5.4.1).

При $x\le a$ получаем, что

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0dt=0.$$

При $a<x\le b$ получаем:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0}p(t)dt+\int\limits_{0}^{x}p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0}0dt+\int\limits_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}.$$

При $x>b$ имеем:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{a}p(t)dt+\int\limits_{a}^{b}p(t)dt+\int\limits_{b}^{x}p(t)dt=1.$$

Таким образом, получаем

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

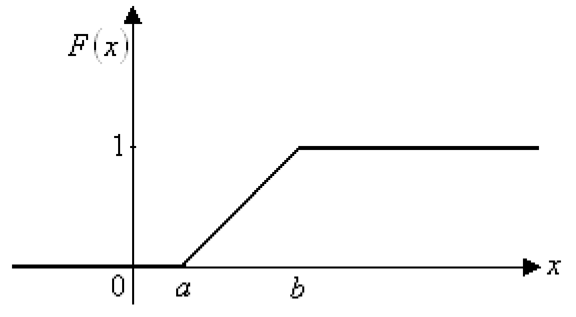


Рис. 5.3

График функции распределения изображён на рис. 5.3. ●

**Пример 7.** Случайная величина $\xi$ подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на участке $[-a,a]$ (рис. 5.4).

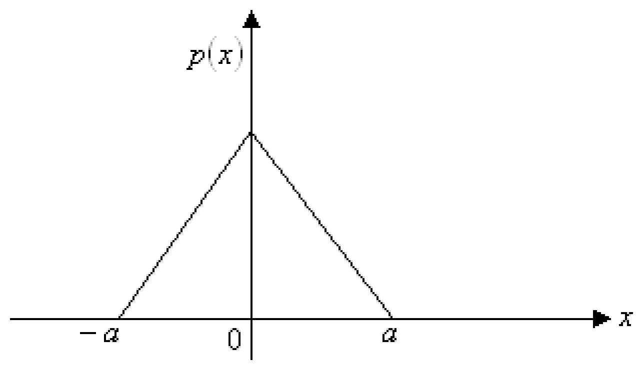


Рис.5.4 Плотность распределения Симпсона

Найти плотность распределения и функцию распределения.

❍ **Решение.** Используя свойство 3 плотности, найдём высоту треугольника:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\frac{1}{2}h2a=ah\Rightarrow h=\frac{1}{a}.$$

Далее находим уравнения рёбер:

$$p(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right), \text{ при } x \in [0, a];$$

$$p(x) = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right), \text{ при } x \in [-a, 0]$$

или

$$p(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), \text{ при } x \in [-a, a].$$

Найдём функцию распределения $F(x)$.

Очевидно, что при $x \le -a$ функция распределения равна нулю, т.е. $F(x) = 0$.

Далее, при $-a < x \le 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{-a} p(t)dt + \int_{-a}^{x} p(t)dt = \int_{-a}^{x} \frac{1}{a}\left(1 + \frac{t}{a}\right)dt = \frac{1}{a}\left(x + \frac{x^2}{2a}\right) + \frac{1}{2}.$$

При $0 < x \le a$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-a} p(t)dt + \int_{-a}^{0} p(t)dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{t}{a}\right)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right).$$

При $x > a$, получаем $F(x) = 1$.

Таким образом, получено

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a; \\ \frac{1}{a}\left(x + \frac{x^2}{2a}\right) + \frac{1}{2}, & -a < x \le 0; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right), & 0 < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

●

## *Для самостоятельного решения*

Для случайной величины X, заданной своим рядом распределения,

| X | –6 | –3 | 0 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0,2 | 0,25 | | 0,3 |

Найти: P(X>4), F(0,3).

Случайная величина имеет плотность $p(x)=ax^3,\ \ x\in[0;1]$. Найти функцию распределения.

Для случайной величины X, распределённой по показательному закону с параметром $\lambda=0{,}2$ найти вероятность события $\{X>2\}$.

Подбрасываются две игральные кости. Пусть Z — сумма выпавших очков. Составить закон распределения случайной величины Z.

Подбрасываются две игральные кости. Пусть Z — модуль разности выпавших очков. Составить закон распределения случайной величины Z.

Случайная величина имеет плотность $p(x)=ax,\ \ x\in[2;4]$. Найти $F(3)$.

В лотерее на каждые 100 билетов приходится 15 выигрышных;
Количество и размер выигрышей следующие:

| | | | |
|---|---|---|---|
| размер выигрыша | 20 | 5 | 1 |
| кол-во выигрышей | 1 | 4 | 10 |

Требуется составить закон распределения случайной величины (размера выигрыша в лотерее).

Для случайной величины X, распределённой по нормальному закону с параметрами $m=-2$ и $\sigma=5$ необходимо: а) найти плотность распределения, б) найти функцию распределения, в) вычислить $P(\,MX<X<MX+DX\,)$.

# Глава 6. Числовые характеристики случайных величин

## *§1. Математическое ожидание случайной величины*

**Математическим ожиданием** $M\xi$ **дискретной случайной величины** $\xi$ называется выражение, вычисляемое по формуле:

$$M\xi = \sum_i x_i p_i \,, \qquad (6.1.1)$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — значения случайной величины, $p_1, p_2, \ldots$ — соответствующие им вероятности, которые определяются равенством $p_i = P(\xi = x_i)$.

Для существования математического ожидания необходимо, чтобы ряд (6.1.1) сходился абсолютно, т.е.

$$\sum_i |x_i| p_i < \infty \,, \qquad (6.1.2)$$

в противном случае говорят, что математическое ожидание не существует.

**Пример 1.** Пусть $\xi$ — случайная величина, равная числу выпавших очков при бросании игрального кубика. Найти математическое ожидание случайной величины $\xi$.

❍ **Решение.** Случайная величина $\xi$ имеет следующий ряд распределения:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $P_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Применяя формулу (6.1.1), получим

$$M\xi = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}.$$

Таким образом, математическое ожидание числа выпавших очков при бросании игрального кубика равно 3,5. ●

**Пример 2.** Найти математическое ожидание случайной величины $\xi$ — число успехов в схеме Бернулли.

❍ **Решение**. Как известно, распределение случайной величины $\xi$ задаётся формулой

$$P(\xi = i) = C_n^i p^i q^{n-i}, \qquad (i = 1, ..., n)$$

где $p$ — вероятность «успеха», $q = 1 - p$, $n$ — количество испытаний в схеме Бернулли.

Используя формулу (6.1.1), получим

$$M\xi = \sum_{i=0}^{n} i p_n(i) = \sum_{i=0}^{n} i C_n^i p^i q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} np \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} p^{i-1} q^{n-i} =$$
$$= np \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i p^i q^{n-1-i} = np \sum_{i=0}^{n-1} p_{n-1}(i) = np.$$

Таким образом, математическое ожидание числа успехов в схеме Бернулли равно $np$. ●

**Математическим ожиданием $M\xi$ непрерывной случайной величины** $\xi$ называется интеграл :

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx. \qquad (6.1.3)$$

Условием существования математического ожидания непрерывной случайной величины является абсолютная сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx < \infty. \qquad (6.1.4)$$

**Пример 3.** Найти математическое ожидание случайной величины $\xi$, плотность которой имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

❍ **Решение**: Используя (6.1.3), получим

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{b}^{a} \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}. \quad ●$$

**Пример 4.** Найти математическое ожидание случайной величины $\xi$, плотность которой имеет вид:

$$p(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

❍ **Решение.** Используя (6.1.3), получим

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (6.1.5)$$

Делаем замену $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$ или $x = m + t\sigma$. В этом случае (6.1.5) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sigma + m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$
$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt. \qquad (6.1.6)$$

Первое слагаемое равно нулю, т.к. равен нулю интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt = -e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Интеграл во втором слагаемом равен 1, т.к. этот интеграл равен функции распределения нормального закона с параметрами $(0,1)$ при значении аргумента равным $x = +\infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt = \Phi(+\infty) = 1.$$

Таким образом, математическое ожидание равно $M\xi = m$. ●

**Пример 5.** Случайная величина $\xi$ имеет плотность Коши:

$$p(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},\quad x\in(-\infty;+\infty). \tag{6.1.7}$$

Проверить, имеет ли случайная величина $\xi$ математическое ожидание.

❍ **Решение**. Проверим условие (6.1.4) существования математического ожидания

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=\infty.$$

Математическое ожидание случайной величины $\xi$, имеющей плотность Коши, не существует, т.к. условие существования математического ожидания не выполнено. ●

## *§2. Математическое ожидание функции от случайной величины. Свойства математического ожидания*

Пусть $\eta=f(\xi)$ — функция от случайной величины. Определим математическое ожидание $M\eta=Mf(\xi)$. Это возможно сделать двумя способами. Первый способ состоит в том, что сначала строится распределение случайной величины $\eta$, затем уже находим $M\eta$. Мы рассмотрим другой способ. Пусть сначала $\xi$ — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1,\ldots,x_n$. Тогда случайная величина $\eta=f(\xi)$ принимает значения $f(x_1),\ldots,f(x_n)$ с теми же вероятностями $p_i=P(\xi=x_i)=P(f(\xi)=f(x_i))$. В этом случае математическое ожидание определяется по формуле

$$M\xi=Mf(\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)p_i. \tag{6.2.1}$$

В случае, если случайная величина $\xi$ принимает счётное число значений, то математическое ожидание случайной величины $\xi$ определяется по формуле

$$M\eta = Mf(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)p_i \,. \qquad (6.2.2)$$

При этом условие существования математического ожидания (6.1.4) примет вид:

$$\sum_i | f(x_i) | \, p_i < \infty \,. \qquad (6.2.3)$$

**Пример 6.** Случайная величина $\xi$ имеет ряд распределения:

| $\xi$ | 4 | 16 | 100 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,7 | 0,1 | 0,2 |

Найти математическое ожидание математической величины: $\eta = \xi + \sqrt{\xi}$ .

❍ **Решение**. Для решения задачи применим формулу (6.2.1).

$$M\eta = M\left(\xi + \sqrt{\xi}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(X_i + \sqrt{X_i}\right)p_i =$$

$$= 0{,}7\left(4 + \sqrt{4}\right) + 0{,}1\left(16 + \sqrt{16}\right) + 0{,}2\left(100 + \sqrt{100}\right) = 4{,}2 + 2 + 22 = 28{,}2.$$

Таким образом, математическое ожидание математической величины $\eta = \xi + \sqrt{\xi}$ равно 28,2. ●

Пусть $\xi$ — непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $p_\xi(x)$. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывная (за исключением, быть может, счётного числа точек). Тогда математическое ожидание случайной величины $\eta = f(\xi)$ определяется по формуле

$$M\eta = Mf(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_\xi(x)dx \,. \qquad (6.2.4)$$

Условие существования математического ожидания случайной величины $\eta = f(\xi)$ имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| p_\xi(x)dx < \infty \,. \qquad (6.2.5)$$

**Пример 7.** Случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$, т.е. её плотность имеет вид:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = a\xi + b$.

❍ **Решение**. Используя формулу (6.2.4), получаем:

$$M\eta=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(xa+b)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+b\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=a\cdot 0+b=b. \text{ ●}$$

**Пример 8.** Случайная величина $\xi$ распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, т.е.

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x\notin\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины $\eta=\sin(\xi)$.

❍ **Решение.** Используя формулу (6.2.4.) , получаем:

$$M\eta=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)dx=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\sin x\,dx=0. \text{ ●}$$

**Свойства математического ожидания.**

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т.е.

$MC=C$, где $C=const$.

**Доказательство**. Постоянную $C$ можно рассматривать как случайную величину, принимающую только одно значение $C$ с вероятностью 1. Следовательно,

$$MC = CP(\xi = C) = C \cdot 1 = C. \ \blacksquare$$

2. $M(a\xi + b) = aM\xi + b$.

**Доказательство**. Пусть $\xi$ — непрерывная случайная величина. Тогда для случайной величины $\eta = a\xi + b$ по формуле (6.2.4.) получаем:

$$M\eta = M(a\xi + b) = \int_{-\infty}^{+\infty}(ax + b)p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = aM\xi + b.$$

Аналогично доказывается и для дискретной случайной величины. ■

3. Для любых случайных величин $\xi$ и $\psi$ математическое ожидание их суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е.

$$M(\xi + \psi) = M\xi + M\psi.$$

**Доказательство**. Пусть случайные величины $\xi$ и $\psi$ — дискретные. Случайная величина $\xi$ принимает значения $X_1,...,X_n$, а случайная величина $\psi$ принимает значения $Y_1,...,Y_m$. Рассмотрим случайную величину $\eta = \xi + \psi$ $(g(x, y) = x + y)$. Случайная величина $\eta$ принимает значения $g(x_i, y_j)$ с вероятностями $p_{ij} = P(\xi = X_i, \psi = Y_j)$. Тогда:

$$M\eta = M(\xi + \psi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{\xi i} + \sum_{j=1}^{m} y_j p_{\psi j} = M\xi + M\psi.$$

При доказательстве воспользовались тем, что

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_{\xi i} \text{ и } \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{\psi j}.$$

Действительно, учитывая, что

$$\sum_{j=1}^{m}(\xi = X_i, \psi = Y_j) = (\xi = X_i)\sum_{j=1}^{m}(\psi = Y_j) = (\xi = X_i)\Omega = (\xi = X_i),$$

то

$$p_{\xi i} = P(\xi = X_i) = P\left(\sum_{j=1}^{m}(\xi = X_i, \psi = Y_j)\right) = \sum_{j=1}^{m} P(\xi = X_i, \psi = Y_j) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

аналогично доказывается, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = p_{\psi j}.$$

Аналогично доказывается и для непрерывной случайной величины. ■

4. Если $\xi$ и $\psi$ независимые случайные величины, то математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е.

$$M(\xi\psi) = M\xi M\psi.$$

**Доказательство**. Пусть величины $\xi$ и $\psi$ — дискретные. В силу независимости случайных величин имеет место равенство:

$p_{ij} = P(\xi = X_i, \psi = Y_j) = P(\xi = X_i)P(\psi = Y_j) = p_{\xi i} p_{\psi j}$. Тогда

$$M(\xi\psi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(\xi = X_i)P(\psi = Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_{\xi i} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{\psi j} = M\xi M\psi.$$

Аналогично доказывается и для дискретной случайной величины. ■

Заметим, что свойство 3 допускает обобщение на сумму любого числа слагаемых, а свойство 4 допускает обобщение на произведение любого числа независимых (в совокупности) сомножителей.

**Пример 9.** Найти математическое ожидание случайной величины $\xi$ — число успехов в схеме Бернулли.

❍ **Решение**. Представим число успехов $\xi$ в схеме Бернулли из $n$ испытаний в виде $\xi = \vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n$, где $\vartheta_i$ — число успехов в $i$-ом испытании. Очевидно, что $M\vartheta_i = 0(1-p) + 1p = p$. По свойству 3 математического ожидания, получаем

$$M\xi = M\left(\vartheta_1 + \ldots + \vartheta_n\right) = M\vartheta_1 + \ldots + M\vartheta_n = \sum_{i=1}^{n} p = np\,.$$

Этот результат совпадает с результатом примера 3, но получен более лёгкими вычислениями. ●

**Пример 10.** Производится ряд независимых опытов, в каждом из которых может появиться событие *A*. Вероятность события *A* в каждом опыте равна *p*. Опыты производятся до первого появления события *A*, после чего они прекращаются. Случайная величина $\xi$ — число произведённых опытов. Найти $M\xi$.

❍ **Решение**. Рассмотрим событие $(\xi = 1)$, в этом случае событие *A* произошло при первом опыте, т.о. $P(\xi = 1) = p$. Перейдём к событию $(\xi = 2)$, в этом случае событие *A* при первом опыте не произошло, но произошло при втором опыте, т.о. $P(\xi = 2) = (1 - p)p$.

Производя аналогичные рассуждения, получаем ряд распределения:

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 | … | $i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p$ | $(1-p)p$ | $(1-p)^2 p$ | … | $(1-p)^{i-1} p$ |

Используя формулу (6.1.1), получим:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} iP(\xi = i) = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} p = \sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} p = p\sum_{i=1}^{\infty} iq^{i-1} =$$

$$= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Таким образом, математическое ожидание равно $\frac{1}{p}$. ●

**Пример 11.** Независимые случайные величины $\xi$ и $\eta$ заданы своими рядами распределений:

| $\xi$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 1/4 | 1/4 | 1/2 |

| $\eta$ | $-1$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 1/4 | 1/4 | 1/2 |

Для случайной величины $Z = \xi + \eta$ найти математическое ожидание двумя способами:

1) по определению математического ожидания;
2) по свойствам математического ожидания.

❍ **Решение**. Рассмотрим 1 способ нахождения математического ожидания. Для этого составим ряд распределения случайной величины *Z*. Для этого удобно воспользоваться таблицей сумм $\xi + \eta$ и соответствующих им вероятностей. Например: $P((\xi = -1)\cdot(\eta = 2)) = P(\xi = -1)P(\eta = 2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

| ξ \ η | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|
| -1 | 1<br>1/12 | 0<br>1/8 | -1<br>1/24 |
| 0 | 2<br>1/12 | 1<br>1/8 | 0<br>1/24 |
| 1 | 3<br>1/6 | 2<br>1/4 | 1<br>1/12 |

Далее очень легко получить ряд распределения случайной величины $Z$.

| *Z* | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|
| *P* | 1/6 | 1/3 | 7/24 | 1/6 | 1/24 |

Естественно, можно было бы обойтись и без таблицы. Например:

$$P(\xi+\eta=1)=P([(\xi=-1)(\eta=2)]+[(\xi=0)(\eta=1)]+[(\xi=1)(\eta=0)])=$$
$$=P(\xi=-1)P(\eta=2)+P(\xi=0)P(\eta=1)+P(\xi=1)P(\eta=0)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{7}{24}.$$

Используя ряд распределения, находим математическое ожидание

$$MZ=3\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{7}{24}+0\cdot\frac{1}{6}+(-1)\cdot\frac{1}{24}=\frac{17}{12}.$$

Перейдём ко второму способу нахождения математического ожидания случайной величины $Z=\xi+\eta$. Используя свойство 3, получим:

$$MZ=M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta=\left(-1\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{17}{12}.\bullet$$

## *§ 3. Дисперсия. Моменты высших порядков*

**Моментом *k*-го** порядка называется выражение, вычисляемое по формулам:

а) для дискретной случайной величины:

$$M\xi^k=\sum_i x_i^k p_i, \qquad (6.3.1)$$

б) для непрерывной случайной величины:

$$M\xi^k=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx. \qquad (6.3.2)$$

Для существования момента *k*-ого порядка необходимо:

а) для дискретной случайной величины — абсолютная сходимость ряда

$$\sum_i \left|x_i^k\right| p_i<\infty, \qquad (6.3.3)$$

б) для непрерывной случайной величины — абсолютная сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^k\right| p(x)dx<\infty. \qquad (6.3.4)$$

Поскольку $\left|\xi^{k-1}\right| \le \left|\xi^{k}\right| + 1$, то из существования момента $k$-го порядка вытекает существование момента ($k$–1)-го порядка и, следовательно, всех моментов меньших порядков.

Момент $k$-го порядка величины $\overset{0}{\xi} = \xi - M\xi$ называется **центральным моментом *k*-го порядка.**

Особую роль играет второй центральный момент, который называется дисперсией и обозначается $D\xi$.

**Дисперсией** случайной величины $\xi$ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания:

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2. \qquad (6.3.5)$$

**Свойства дисперсии**.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю, т.е.

$DC = M\left(C - MC\right)^2 = M\left(C - C\right)^2 = M0 = 0.$ ■

2. Дисперсия является неотрицательной величиной, т.е. $D\xi \ge 0$.

3. Для любых действительных чисел $a$ и $b$ справедливо равенство

$$D(a\xi + b) = a^2 D\xi + b.$$

**Доказательство**. Из свойства 2 математического ожидания получаем:

$$D(a\xi + b) = M\left(a\xi + b - M\left(a\xi + b\right)\right)^2 = M\left(a\xi + b - aM\xi - b\right)^2 =$$
$$= M\left(a\xi - aM\xi\right)^2 = a^2 M\left(\xi - M\xi\right)^2 = a^2 D\xi.$$

■

4. $D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2$.

**Доказательство**. Используя определение дисперсии и свойства 2 и 3 математического ожидания, получаем:

$$D\xi = M\left(\xi - M\xi\right)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi M\xi + \left(M\xi\right)^2\right) = M\xi^2 - M\left(2\xi M\xi\right) + M\left(\left(M\xi\right)^2\right) =$$
$$= M\xi^2 - 2\left(M\xi\right)^2 + \left(M\xi\right)^2 = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2.$$

■

5. Если $\xi$ и $\eta$ независимые случайные величины, дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий случайных величин, т.е.

$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta\,.$$

**Доказательство**. Если $\xi$ и $\eta$ независимые случайные величины, то и случайные величины $\overset{0}{\xi}=\xi-M\xi$ и $\overset{0}{\eta}=\eta-M\eta$ будут независимыми. Тогда, используя свойства 2-4 математического ожидания, получаем:

$$D(\xi+\eta)=M\left(\xi+\eta-M\left(\xi+\eta\right)\right)^2=M\left((\xi-M\xi)+(\eta-M\eta)\right)^2=M\left(\xi-M\xi\right)^2+$$
$$+2M\left((\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\right)+M\left(\eta-M\eta\right)^2=D\xi+2M\left(\xi-M\xi\right)M\left(\eta-M\eta\right)+D\eta=$$
$$=D\xi+D\eta.$$

■

Очевидно, что дисперсия $D\xi$ имеет размерность квадрата случайной величины $\xi$. Для практических же целей удобно иметь числовую характеристику, размерность которой совпадает с размерностью $\xi$.

***Определение*.** **Средним квадратичным отклонением** случайной величины $\xi$ называется выражение, вычисляемое по формуле:

$$\sigma=\sqrt{D\xi}\,. \qquad (6.3.6)$$

**Пример 12.** Найти дисперсию случайной величины $\xi$, плотность которой имеет вид (равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$):

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

❍ **Решение**. Используя определение дисперсии $D\xi=M\left(\xi-M\xi\right)^2$, формулу для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины (6.3.2) и результат примера 4, получаем:

$$D\xi=M\left(\xi-M\xi\right)^2=\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{(b-a)^2}{12}\,.$$ ●

**Пример 13.** Найти дисперсию случайной величины $\xi$, распределённой по нормальному закону с параметрами $(m, \sigma^2)$ (см. Пример 4).

❍ **Решение**. Используя определение дисперсии $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, формулу для вычисления дисперсии непрерывной случайной величины (6.3.2) и результат примера 5, получаем:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (6.3.5)$$

Делаем замену $t = \dfrac{x-m}{\sigma}$ или $x = m + t\sigma$, при этом $dx = \sigma dt$. В этом случае выражение (6.3.5) примет вид:

$$= \sigma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} d(-e^{-\frac{t^2}{2}}) = \sigma^2 \frac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2. \quad \bullet$$

**Пример 14.** При условии примера 11 найти дисперсию случайной величины *Z*.

❍ **Решение**. Рассмотрим 1 способ нахождения дисперсии, используя ряд распределения случайной величины *Z*, найденный в примере 12,

| *Z* | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|
| *P* | 1/6 | 1/3 | 7/24 | 1/6 | 1/24 |

и свойство 4 дисперсии, получим:

$$MZ^2 = 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{7}{24} + 0^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{19}{6},$$

$$DZ = MZ^2 - (MZ)^2 = \frac{19}{6} - \left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{167}{144}.$$

Напомним, что математическое ожидание $MZ = \dfrac{17}{12}$ было найдено в примере 12.

Перейдём ко второму способу нахождения математического ожидания случайной величины $Z = \xi + \eta$. Используя свойство 5 дисперсии случайной величины, получим:

$$M\xi = \frac{1}{4},\ M\xi^2 = 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$M\eta = \frac{7}{6},\ M\eta^2 = 4\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{6},$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{11}{16},$$

$$Dz = D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta = \frac{11}{16} + \frac{17}{36} = \frac{167}{144}. \ \bullet$$

## *Для самостоятельного решения*

Независимые случайные величины X и Y заданы своими рядами распределения

| X | 0 | 2 |
|---|---|---|
| P | 1/7 | 6/7 |

| Y | 4 | 6 |
|---|---|---|
| P | 1/2 | 1/2 |

Для случайной величины Z = X + Y найти: ряд распределения, математическое ожидание и дисперсию.

Стрелок имеет 5 патронов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Стрельба ведётся до первого попадания. Для случайной величины X — число истраченных патронов, составить ряд распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

Стрелок имеет 4 патрона. Вероятность при одном попадании равна 0,8. Стрельба ведётся до первого попадания. Для случайной величины X — число оставшихся патронов, составить ряд распределения, найти математическое ожидание и дисперсию.

Случайная величина имеет плотность $p(x) = ax^3$, $x \in [0; 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Для случайной величины X, распределённой по показательному закону с параметром $\lambda = 2$, найти математическое ожидание и дисперсию.

Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 0,2. Некто имеет 4 лотерейных билета. Написать ряд распределения числа выигравших билетов. Найти математическое ожидание и дисперсию числа выигравших билетов. Найти вероятность выиграть хотя бы по одному билету.

# Приложения

**Приложение 1**

**Таблица значений функции** $p_n(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

| $m$ | Значения $\lambda$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 |
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 | 0,496585 |
| 1 | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 | 0,347610 |
| 2 | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 | 0,121663 |
| 3 | 0,000151 | 0,001092 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 | 0,028388 |
| 4 | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 | 0,004968 |
| 5 | | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 | 0,000696 |
| 6 | | | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000036 | 0,000081 |
| 7 | | | | | 0,000001 | 0,000003 | 0,000008 |
| 8 | | | | | | | 0,000001 |

| $m$ | Значения $\lambda$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,8 | 0,9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0,449329 | 0,406570 | 0,367879 | 0,135335 | 0,049787 | 0,018316 | 0,006738 |
| 1 | 0,359463 | 0,365913 | 0,367879 | 0,270671 | 0,149361 | 0,073263 | 0,033690 |
| 2 | 0,143785 | 0,164661 | 0,183940 | 0,270671 | 0,224042 | 0,146525 | 0,084224 |
| 3 | 0,038343 | 0,049398 | 0,061313 | 0,180447 | 0,224042 | 0,195367 | 0,140374 |
| 4 | 0,007669 | 0,011115 | 0,015328 | 0,090224 | 0,168031 | 0,195367 | 0,175467 |
| 5 | 0,001227 | 0,002001 | 0,003066 | 0,036089 | 0,100819 | 0,156293 | 0,175467 |
| 6 | 0,000164 | 0,000300 | 0,000511 | 0,012030 | 0,050409 | 0,104196 | 0,146223 |
| 7 | 0,000019 | 0,000039 | 0,000073 | 0,003437 | 0,021604 | 0,059540 | 0,104445 |
| 8 | 0,000002 | 0,000004 | 0,000009 | 0,000859 | 0,008102 | 0,029770 | 0,065278 |
| 9 | | | 0,000001 | 0,000191 | 0,002701 | 0,013231 | 0,036266 |
| 10 | | | | 0,000038 | 0,000810 | 0,005292 | 0,018133 |
| 11 | | | | 0,000007 | 0,000221 | 0,001925 | 0,008242 |
| 12 | | | | 0,000001 | 0,000055 | 0,000642 | 0,003434 |
| 13 | | | | | 0,000013 | 0,000197 | 0,001321 |
| 14 | | | | | 0,000003 | 0,000056 | 0,000472 |
| 15 | | | | | 0,000001 | 0,000015 | 0,000157 |
| 16 | | | | | | 0,000004 | 0,000049 |
| 17 | | | | | | 0,000001 | 0,000014 |
| 18 | | | | | | | 0,000004 |
| 19 | | | | | | | 0,000001 |

**Приложение 2**

## Плотность стандартного нормального распределения

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,39894 | 0,39892 | 0,39886 | 0,39876 | 0,39862 | 0,39844 | 0,39822 | 0,39797 | 0,39767 | 0,39733 |
| 0,1 | 0,39695 | 0,39654 | 0,39608 | 0,39559 | 0,39505 | 0,39448 | 0,39387 | 0,39322 | 0,39253 | 0,39181 |
| 0,2 | 0,39104 | 0,39024 | 0,38940 | 0,38853 | 0,38762 | 0,38667 | 0,38568 | 0,38466 | 0,38361 | 0,38251 |
| 0,3 | 0,38139 | 0,38023 | 0,37903 | 0,37780 | 0,37654 | 0,37524 | 0,37391 | 0,37255 | 0,37115 | 0,36973 |
| 0,4 | 0,36827 | 0,36678 | 0,36526 | 0,36371 | 0,36213 | 0,36053 | 0,35889 | 0,35723 | 0,35553 | 0,35381 |
| 0,5 | 0,35207 | 0,35029 | 0,34849 | 0,34667 | 0,34482 | 0,34294 | 0,34105 | 0,33912 | 0,33718 | 0,33521 |
| 0,6 | 0,33322 | 0,33121 | 0,32918 | 0,32713 | 0,32506 | 0,32297 | 0,32086 | 0,31874 | 0,31659 | 0,31443 |
| 0,7 | 0,31225 | 0,31006 | 0,30785 | 0,30563 | 0,30339 | 0,30114 | 0,29887 | 0,29659 | 0,29431 | 0,29200 |
| 0,8 | 0,28969 | 0,28737 | 0,28504 | 0,28269 | 0,28034 | 0,27798 | 0,27562 | 0,27324 | 0,27086 | 0,26848 |
| 0,9 | 0,26609 | 0,26369 | 0,26129 | 0,25888 | 0,25647 | 0,25406 | 0,25164 | 0,24923 | 0,24681 | 0,24439 |
| 1,0 | 0,24197 | 0,23955 | 0,23713 | 0,23471 | 0,23230 | 0,22988 | 0,22747 | 0,22506 | 0,22265 | 0,22025 |
| 1,1 | 0,21785 | 0,21546 | 0,21307 | 0,21069 | 0,20831 | 0,20594 | 0,20357 | 0,20121 | 0,19886 | 0,19652 |
| 1,2 | 0,19419 | 0,19186 | 0,18954 | 0,18724 | 0,18494 | 0,18265 | 0,18037 | 0,17810 | 0,17585 | 0,17360 |
| 1,3 | 0,17137 | 0,16915 | 0,16694 | 0,16474 | 0,16256 | 0,16038 | 0,15822 | 0,15608 | 0,15395 | 0,15183 |
| 1,4 | 0,14973 | 0,14764 | 0,14556 | 0,14350 | 0,14146 | 0,13943 | 0,13742 | 0,13542 | 0,13344 | 0,13147 |
| 1,5 | 0,12952 | 0,12758 | 0,12566 | 0,12376 | 0,12188 | 0,12001 | 0,11816 | 0,11632 | 0,11450 | 0,11270 |
| 1,6 | 0,11092 | 0,10915 | 0,10741 | 0,10567 | 0,10396 | 0,10226 | 0,10059 | 0,09893 | 0,09728 | 0,09566 |
| 1,7 | 0,09405 | 0,09246 | 0,09089 | 0,08933 | 0,08780 | 0,08628 | 0,08478 | 0,08329 | 0,08183 | 0,08038 |
| 1,8 | 0,07895 | 0,07754 | 0,07614 | 0,07477 | 0,07341 | 0,07206 | 0,07074 | 0,06943 | 0,06814 | 0,06687 |
| 1,9 | 0,06562 | 0,06438 | 0,06316 | 0,06195 | 0,06077 | 0,05959 | 0,05844 | 0,05730 | 0,05618 | 0,05508 |
| 2,0 | 0,05399 | 0,05292 | 0,05186 | 0,05082 | 0,04980 | 0,04879 | 0,04780 | 0,04682 | 0,04586 | 0,04491 |
| 2,1 | 0,04398 | 0,04307 | 0,04217 | 0,04128 | 0,04041 | 0,03955 | 0,03871 | 0,03788 | 0,03706 | 0,03626 |
| 2,2 | 0,03547 | 0,03470 | 0,03394 | 0,03319 | 0,03246 | 0,03174 | 0,03103 | 0,03034 | 0,02965 | 0,02898 |
| 2,3 | 0,02833 | 0,02768 | 0,02705 | 0,02643 | 0,02582 | 0,02522 | 0,02463 | 0,02406 | 0,02349 | 0,02294 |
| 2,4 | 0,02239 | 0,02186 | 0,02134 | 0,02083 | 0,02033 | 0,01984 | 0,01936 | 0,01888 | 0,01842 | 0,01797 |
| 2,5 | 0,01753 | 0,01709 | 0,01667 | 0,01625 | 0,01585 | 0,01545 | 0,01506 | 0,01468 | 0,01431 | 0,01394 |
| 2,6 | 0,01358 | 0,01323 | 0,01289 | 0,01256 | 0,01223 | 0,01191 | 0,01160 | 0,01130 | 0,01100 | 0,01071 |
| 2,7 | 0,01042 | 0,01014 | 0,00987 | 0,00961 | 0,00935 | 0,00909 | 0,00885 | 0,00861 | 0,00837 | 0,00814 |
| 2,8 | 0,00792 | 0,00770 | 0,00748 | 0,00727 | 0,00707 | 0,00687 | 0,00668 | 0,00649 | 0,00631 | 0,00613 |
| 2,9 | 0,00595 | 0,00578 | 0,00562 | 0,00545 | 0,00530 | 0,00514 | 0,00499 | 0,00485 | 0,00470 | 0,00457 |

**Приложение 3**

## Функция распределения стандартного нормального закона

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \left(\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)\right)$$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,50000 | 0,50399 | 0,50798 | 0,51197 | 0,51595 | 0,51994 | 0,52392 | 0,52790 | 0,53188 | 0,53586 |
| 0,1 | 0,53983 | 0,54380 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57535 |
| 0,2 | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| 0,3 | 0,61791 | 0,62172 | 0,62552 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| 0,4 | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68439 | 0,68793 |
| 0,5 | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | 0,70884 | 0,71226 | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| 0,6 | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| 0,7 | 0,75804 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78524 |
| 0,8 | 0,78814 | 0,79103 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79955 | 0,80234 | 0,80511 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| 0,9 | 0,81594 | 0,81859 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83398 | 0,83646 | 0,83891 |
| 1,0 | 0,84134 | 0,84375 | 0,84614 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | 0,85543 | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| 1,1 | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87286 | 0,87493 | 0,87698 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88298 |
| 1,2 | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89617 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| 1,3 | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91308 | 0,91466 | 0,91621 | 0,91774 |
| 1,4 | 0,91924 | 0,92073 | 0,92220 | 0,92364 | 0,92507 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| 1,5 | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| 1,6 | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95449 |
| 1,7 | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| 1,8 | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96638 | 0,96712 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| 1,9 | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| 2,0 | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |
| 2,1 | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| 2,2 | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98899 |
| 2,3 | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| 2,4 | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| 2,5 | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| 2,6 | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| 2,7 | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| 2,8 | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99801 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |

## Используемая литература


- *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — 9-е изд., стёр.— М.: Высшая школа, 2003.— 479 с.
- *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. — 8-е изд., испр. и доп.—М.: Едиториал УРСС, 2005.— 448 с.
- *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и её приложения в экономическом образовании. — М.: Дело, 2002.
- *Кузнецов Б.Т.* Математика. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
- *Черняк А.А., Новиков В.А., Мельников О.И., Кузнецов А.В.* Математика для экономистов на базе Mathcad. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003