

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**Московский государственный университет
приборостроения и информатики**



кафедра высшей математики

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические для студентов дневной формы обучения для самостоятельной
подготовки к экзамену и выполнению контрольных работ.

Москва 2007

УДК 517.

Неопределенный и определенный интеграл. Методические для студентов дневной формы обучения для самостоятельной подготовки к экзамену и выполнению контрольных работ.. Сост.: к.ф.-м.н., доц. Баланкина Е.С., д.т.н., ст. препод. Каримова Н.А., ст. препод. Меренкова Т.В., ст. препод. Соркина Л.И., доц. Якововская И.М. /МГУПИ. М. 2007.

Излагаются основные методы нахождения первообразных, геометрические и механические приложения определенного интеграла. Приведены примеры решения различных типов задач.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дневной форме обучения. Библиогр: 5.

Рецензент: д.т.н., проф. Головешкин В.А.

Введение.

Данные методические указания состоят из двух разделов и дополнения. В первом разделе указаны основные методы нахождения первообразных. Второй раздел содержит основные понятия, относящиеся к приложению определенного интеграла к решению некоторых геометрических и механических задач. В дополнении приведены некоторые сведения из теории комплексных чисел. Цель данного пособия помочь студенту самостоятельно подготовиться к выполнению контрольных работ. При написании пособия авторы не ставили своей целью дать систематическое изложение теоретического материала. Перед каждой рассматриваемой задачей дается тот теоретический материал, который необходим для ее решения.

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Прежде чем перейти к решению конкретных задач напомним некоторые понятия из теоретического курса.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если выполнено соотношение $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Если некоторая функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то функция $F_1(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также будет первообразной для функции $f(x)$.

Вся совокупность первообразных для функции $f(x)$ может быть записана в виде $F(x) + C$, где $F(x)$ – некоторая конкретная первообразная, а C – произвольная постоянная величина.

Вся совокупность первообразных для данной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается $\int f(x)dx$.

Таким образом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – некоторая конкретная первообразная, а C – произвольная постоянная величина.

Операция нахождения неопределенного интеграла называется интегрированием функции. Следовательно, проблема интегрирования функции сводится к нахождению некоторой конкретной первообразной. (Проблема прибавления произвольной постоянной вряд ли является серьезной.)

Отметим также, что можно очень просто проверить, правильно ли вычислен неопределенный интеграл. Для этого достаточно в выражении $\int f(x)dx = F(x) + C$ вычислить производную от правой части $F(x) + C$ и убедиться, что она равна подынтегральной функции $f(x)$.

Прежде чем перейти к свойствам неопределенного интеграла, приведем таблицу некоторых основных интегралов от элементарных функций, которые мы в дальнейшем будем называть табличными интегралами.

Табличные интегралы.

1. $\int 0 dx = C$.
2. $\int 1 dx = x + C$.
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (при $\alpha \neq -1$).
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$), в частности $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.
11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + C$.
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

Все решаемые в данном пособии задачи мы будем стараться по мере возможности сводить к вычислению данных табличных интегралов.

Напомним некоторые свойства неопределенного интеграла.

1. Согласно определению неопределенного интеграла его производная равна подынтегральной функции, то есть $\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$.
2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению - $d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$.
3. Неопределенный интеграл от производной некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная - $\int F'(x) dx = F(x) + C$.
4. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная - $\int dF(x) = F(x) + C$.
5. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций - $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла - $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$.

Первый из приемов, который мы рассмотрим— это метод замены переменной или близкий к этому прием — метод подведения под знак дифференциала. Поясним суть этих методов.

Метод замены переменной.

Пусть требуется вычислить $\int f(x)dx$ и по каким-то причинам нам удобно сделать замену переменной в виде $x = \varphi(t)$, где t - новая независимая переменная. Тогда $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. При этом, конечно, предполагаем, что после вычисления интеграла в правой части мы подставим значение t , выраженное как функция x из соотношения $x = \varphi(t)$.

Метод подведения под знак дифференциала состоит в следующем. Пусть нам известно, что $\int f(x)dx = F(x) + C$. Требуется вычислить интеграл вида $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$. Тогда $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$. Поясним подробнее, почему этот метод назван «методом подведения под знак дифференциала». Напомним, что дифференциалом функции $y = f(x)$ называется выражение вида $dy = f'(x)dx$.

В интеграле $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ обозначим $u = \varphi(x)$, а тогда для дифференциала функции $u = \varphi(x)$ имеем следующее выражение $du = \varphi'(x)dx$. Следовательно, имеем $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C$.

Далее рассмотрим первый пример контрольной работы.

Найти $\int x^2 e^{3x^3+5} dx$.

Основное, что необходимо сделать при вычислении подобных интегралов — это выделить ту главную «неприятность», которая мешает превратить этот интеграл в табличный, и обозначить ее в качестве новой переменной.

(Конечно, при этом нельзя весь интеграл считать «неприятностью».) В данном примере обозначим $u = 3x^3 + 5$. Тогда для дифференциала данной функции имеем выражение $du = 9x^2 dx$. Следовательно $x^2 dx = \frac{1}{9} du$

Подставляя в исходное выражение, получаем

$$\int x^2 e^{3x^3+5} = \int e^{3x^3+5} (x^2 dx) = \int e^u \frac{1}{9} du = \frac{1}{9} \int e^u du = \frac{1}{9} e^u + C = \frac{1}{9} e^{3x^3+5} + C.$$

Если вы уже неплохо владеете техникой интегрирования, то вам не обязательно явно выписывать замену. Просто заметив, что $x^2 dx = \frac{1}{9} d(3x^3 + 5)$,

мы можем записать $\int x^2 e^{3x^3+5} = \int e^{3x^3+5} (x^2 dx) = \int e^{3x^3+5} \frac{1}{9} d(3x^3 + 5) = \frac{1}{9} e^{3x^3+5} + C$.

Покажем еще один прием, который можно использовать в случае, достаточно громоздкого подынтегрального выражения. Обозначим $u = 3x^3 + 5$, $du = 9x^2 dx$. Тогда имеем следующую связь между дифференциалами: $dx = \frac{du}{9x^2}$.

Подставляя в исходное выражение, получаем

$$\int x^2 e^{3x^3+5} dx = \int x^2 e^u \frac{du}{9x^2} = \frac{1}{9} \int e^u du = \frac{1}{9} e^u + C = \frac{1}{9} e^{3x^3+5} + C.$$

С точки зрения математической строгости здесь допущено небольшое

«хулиганство». В выражении $\int x^2 e^u \frac{du}{9x^2}$ под знаком интеграла оказались как

бы две независимые переменные u и x . Однако мы на самом деле в этом выражении считаем, что независимой переменной является только u , а x является функцией u , выраженной из соотношения $u = 3x^3 + 5$. То есть

$x = \sqrt[3]{\frac{u-5}{3}}$. Но мы просто «поленились» пока подставить ее в явном виде, и,

как оказалось, не зря. В дальнейшем мы будем опускать подобные пояснения, подразумевая их известными. Рассмотрим еще некоторые примеры.

Задача 1. Найти $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 10}}$.

Обозначим $u = x^2$. Тогда $du = 2x dx$. Следовательно, $x dx = \frac{du}{2}$.

Получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 10}} &= \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 10}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 10}} = \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - 10}| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + \sqrt{x^4 - 10}| + C. \end{aligned}$$

Задача 2. Найти $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1+x^2)} dx$.

В этом примере не сразу можно заметить, что $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$. Главная неприятность, конечно, $\operatorname{arctg} x$. Поэтому обозначим $u = \operatorname{arctg} x$. Тогда

$du = \frac{dx}{1+x^2}$. Следовательно, $dx = (1+x^2) du$.

Получаем

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{(1+x^2)} dx = \int \frac{u^2}{(1+x^2)} (1+x^2) du = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}^3 x + C.$$

Следующий тип примеров - это интегралы вида $\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$.

Ниже будет предложена схема вычисления подобных интегралов. При этом мы не будем доводить общий случай до конечного ответа. На первом шаге в числителе выделяем производную знаменателя

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax + b) + N - \frac{M}{2a}b}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Далее разбиваем полученный интеграл на сумму двух интегралов

$$\int \frac{\frac{M}{2a}(2ax + b) + N - \frac{M}{2a}b}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b)}{ax^2 + bx + c} dx + \left(N - \frac{M}{2a}b \right) \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

Вычислим каждый из интегралов.

$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx$ вычисляется с помощью замены $z = ax^2 + bx + c$. Тогда

$dz = (2ax + b)dx$. Но явно эту замену мы не будем в процессе решения выписывать, а просто заметим, что $d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx$. Получаем

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{ax^2 + bx + c} = \ln|ax^2 + bx + c|.$$

(При вычислении последнего интеграла мы воспользовались табличным

интегралом $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$).

Второй интеграл преобразуем к виду

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \text{ где } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}.$$

Для вычисления полученного интеграла выделим в знаменателе полный квадрат. На всякий случай напомним (надеемся, что студенты на нас не

обидаются за это напоминание) $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$.

Получим

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

Сделаем замену $u = x + \frac{p}{2}$. Тогда $du = dx$.

Мы снова не будем явно выписывать эту замену, а просто заметим

$$dx = d\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

Далее рассмотрим три случая.

Случай 1. $q - \frac{p^2}{4} > 0$. Обозначим $q - \frac{p^2}{4} = m^2$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)}{m}.$$

(Мы воспользовались табличным интегралом $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$)

Случай 2. $q - \frac{p^2}{4} < 0$. Обозначим $q - \frac{p^2}{4} = -m^2$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - m^2} = \frac{1}{2m} \ln \left| \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right) - m}{\left(x + \frac{p}{2}\right) + m} \right|$$

(Мы воспользовались табличным интегралом $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$)

Случай 3. $q - \frac{p^2}{4} = 0$. Тогда

$$\int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \int \left(x + \frac{p}{2}\right)^{-2} d\left(x + \frac{p}{2}\right) = \frac{-1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)}.$$

(Мы воспользовались табличным интегралом $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha = -2$)

Задача 3. Найти $\int \frac{2x-7}{x^2+4x+3} dx$.

Выделим в числителе производную знаменателя.

$$\int \frac{2x-7}{x^2+4x+3} dx = \int \frac{(2x+4) - 7 - 4}{x^2+4x+3} dx = \int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+3} dx - 11 \int \frac{1}{x^2+4x+3} dx$$

В первом интеграле заметим, что $d(x^2+4x+3) = (2x+4)dx$. Во втором интеграле выделим полный квадрат в знаменателе.

Тогда $x^2+4x+3 = (x+2)^2 + 3 - 4 = (x+2)^2 - 1$. Имеем $d(x+2) = dx$.

Получаем

$$\int \frac{(2x+4)}{x^2+4x+3} dx - 11 \int \frac{1}{x^2+4x+3} dx = \int \frac{d(x^2+4x+3)}{x^2+4x+3} - 11 \int \frac{1}{(x+2)^2 - 1} d(x+2) =$$

$$= \ln|x^2+4x+3| - 11 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)-1}{(x+2)+1} \right| + C = \ln|x^2+4x+3| - \frac{11}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C$$

Ответ: $\int \frac{2x-7}{x^2+4x+3} dx = \ln|x^2+4x+3| - \frac{11}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C.$

Задача 4. Найти $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+13} dx.$

Выделим в числителе производную знаменателя.

$$\int \frac{3x-1}{x^2+6x+13} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-1-9}{x^2+6x+13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x+6)}{x^2+6x+13} dx - 10 \int \frac{1}{x^2+6x+13} dx$$

Заметим, что, $d(x^2+6x+13) = (2x+6)dx$. Во втором интеграле выделим полный квадрат в знаменателе $x^2+6x+13 = (x+3)^2 + 13 - 9 = (x+3)^2 + 4$, тогда $d(x+3) = dx$.

Получаем

$$\frac{3}{2} \int \frac{(2x+6)}{x^2+6x+13} dx - 10 \int \frac{1}{x^2+6x+13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+6x+13)}{x^2+6x+13} - 10 \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4} =$$

$$= \frac{3}{2} \ln|x^2+6x+13| - 5 \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$$

Ответ: $\int \frac{3x-1}{x^2+6x+13} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2+6x+13| - 5 \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.$

Задача 5. Найти $\int \frac{8x-1}{x^2-10x+25} dx.$

Выделим в числителе производную знаменателя.

$$\int \frac{8x-1}{x^2-10x+25} dx = \int \frac{\frac{8}{2}(2x-10)-1+40}{x^2-10x+25} dx = 4 \int \frac{(2x-10)}{x^2-10x+25} dx + 39 \int \frac{1}{x^2-10x+25} dx$$

Заметим, что $d(x^2-10x+25) = (2x-10)dx$. Во втором интеграле выделим полный квадрат в знаменателе $x^2-10x+25 = (x-5)^2 + 25 - 25 = (x-5)^2$, тогда $d(x-5) = dx$.

Получаем

$$4 \int \frac{(2x-10)}{x^2-10x+25} dx + 39 \int \frac{1}{x^2-10x+25} dx = 4 \int \frac{d(x^2-10x+25)}{x^2-10x+25} + 39 \int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2} =$$

$$= 4 \ln |x^2 - 10x + 25| - \frac{39}{x-5} + C$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{8x-1}{x^2-10x+25} dx = 4 \ln |x^2 - 10x + 25| - \frac{39}{x-5} + C.$$

Следующий пример требует навыков вычисления интегралов вида

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Приведем схему вычисления подобных интегралов. Некоторые моменты предложенной схемы будут аналогичны рассмотренным в предыдущем пункте. На первом шаге, как и ранее, в числителе выделяем производную знаменателя

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{\frac{M}{2a}(2ax + b) + N - \frac{M}{2a}b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

Далее разбиваем полученный интеграл на сумму двух интегралов

$$\int \frac{\frac{M}{2a}(2ax + b) + N - \frac{M}{2a}b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{M}{2a} \int \frac{(2ax + b)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(N - \frac{M}{2a}b \right) \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

Вычислим каждый из интегралов.

Для первого интеграла $\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ заметим, что

$$d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx \text{ Получаем}$$

$$\int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = 2\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

(Мы воспользовались табличным интегралом $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha = -\frac{1}{2}$).

Для вычисления второго интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ придется рассмотреть два случая.

Случай 1. $a > 0$.

Преобразуем его к виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}, \text{ где } p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}.$$

Выделим в знаменателе полный квадрат: $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$,

$$d\left(x + \frac{p}{2}\right) = dx.$$

Тогда полученный интеграл вычисляется по схеме:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + px + q}} dx &= \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}} = \ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} \right| = \\ &= \ln \left| x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q} \right|. \end{aligned}$$

(Мы воспользовались табличным интегралом $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C$)

Случай 2. $a < 0$.

Преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-a\left(-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{(-x^2 + px + q)}}, \text{ где} \\ p &= -\frac{b}{a}, q = -\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Выделим в знаменателе полный квадрат:

$$\begin{aligned} -x^2 + px + q &= -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4} = m^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \text{ где } m^2 = q + \frac{p^2}{4} \\ d\left(x - \frac{p}{2}\right) &= dx. \end{aligned}$$

Тогда полученный интеграл вычисляется по схеме:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + px + q}} dx = \int \frac{d\left(x - \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{m^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{p}{2}}{m}.$$

(Мы воспользовались табличным интегралом $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$)

Задача 6. Найти $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx$.

Выделим в числителе производную знаменателя.

$$\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+2) + 2-5}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx - 3 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx$$

Заметим, что, $d(x^2+2x-5) = (2x+2)dx$. Во втором интеграле выделим полный квадрат в знаменателе $x^2+2x-5 = (x+1)^2 - 5 - 1 = (x+1)^2 - 6$, тогда $d(x+1) = dx$.

Получаем

$$\frac{5}{2} \int \frac{(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx - 3 \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2+2x-5)}{\sqrt{x^2+2x-5}} - 3 \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-6}} =$$

$$= 5\sqrt{x^2+2x-5} - 3 \ln \left| x+1 + \sqrt{(x+1)^2-6} \right| + C =$$

$$= 5\sqrt{x^2+2x-5} - 3 \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2+2x-5} \right| + C.$$

Ответ: $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+2x-5}} dx = 5\sqrt{x^2+2x-5} - 3 \ln \left| x+1 + \sqrt{x^2+2x-5} \right| + C.$

Задача 7. Найти $\int \frac{x-3}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx$.

Выделим в числителе производную знаменателя

$$\int \frac{x-3}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx = \int \frac{-\frac{1}{4}(-4x-6) - 3 - \frac{3}{2}}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{(-4x-6)}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx - \frac{9}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx$$

Заметим, что, $d(1-6x-2x^2) = (-4x-6)dx$. Во втором интеграле выделим полный квадрат в знаменателе

$$\begin{aligned} 1-6x-2x^2 &= -(2x^2+6x-1) = -2 \left[x^2+3x-\frac{1}{2} \right] = -2 \left[\left(x+\frac{3}{2} \right)^2 - \frac{11}{4} \right] = \\ &= 2 \left[\frac{11}{4} - \left(x+\frac{3}{2} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

тогда $d\left(x+\frac{3}{2}\right) = dx$.

$$\begin{aligned} &\text{Получаем} \\ &-\frac{1}{4} \int \frac{(-4x-6)}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx - \frac{9}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx = \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(1-6x-2x^2)}{\sqrt{1-6x-2x^2}} - \frac{9}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2 \left[\frac{11}{4} - \left(x+\frac{3}{2} \right)^2 \right]}} = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{1-6x-2x^2} - \frac{9}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{3}{2}\right)^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{1-6x-2x^2} - \frac{9}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{1-6x-2x^2} - \frac{9}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{x-3}{\sqrt{1-6x-2x^2}} dx = -\frac{1}{2} \sqrt{1-6x-2x^2} - \frac{9}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C.$$

Применение формулы интегрирования по частям для вычисления неопределенных интегралов.

Формула интегрирования по частям имеет вид

$$\int u dv = uv - \int v du$$

В этой формуле за du и dv обозначены дифференциалы некоторых функций.

На всякий случай еще раз напомним определение дифференциала функции $dy = y'dx$, а так же формулу восстановления функции по ее дифференциалу $\int dy = y + C$.

В начале рассмотрим один пример.

Задача 8. Найти $\int x \arctg x dx$.

При использовании формулы интегрирования по частям важно правильно на первом этапе разбить подынтегральное выражение на два множителя u и dv . Неудачное разбиение может привести не к упрощению, а, наоборот, к усложнению примера. В указанном примере обозначим $u = \arctg x$. Всю оставшуюся часть подынтегрального выражения мы обозначим dv , то есть $dv = x dx$.

Тогда имеем:

$$u = \arctg x, du = (\arctg x)' dx = \frac{dx}{1+x^2};$$

$$dv = x dx, v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int x \arctg x dx = \int \arctg x (x dx) = \frac{x^2}{2} \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{(1+x^2)}.$$

Для вычисления последнего интеграла подынтегральное выражение преобразуем к виду

$$\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int x \arctg x dx &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{(1+x^2)} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int x \arctg x dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C$.

Данная формула применяется для вычисления ряда типов неопределенных интегралов. Мы разберем некоторые из них.

Интегралы вида: $\int P_n(x) e^{kx} dx$; $\int P_n(x) \sin kx dx$; $\int P_n(x) \cos kx dx$.

Где $P_n(x)$ - многочлен степени n . При вычислении таких интегралов принимается $u = P_n(x)$.

Отметим, что тогда:

1) $dv = e^{kx} dx$; $v = \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} \int e^{kx} d(kx) = \frac{1}{k} e^{kx}$, то есть $e^{kx} dx = \frac{1}{k} d(e^{kx})$;

2) $dv = \sin kx dx$; $v = \int \sin kx dx = \frac{1}{k} \int \sin kx d(kx) = -\frac{1}{k} \cos kx$, то есть $\sin kx dx = -\frac{1}{k} d(\cos kx)$;

3) $dv = \cos kx dx$; $v = \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \int \cos kx d(kx) = \frac{1}{k} \sin kx$, то есть $\cos kx dx = \frac{1}{k} d(\sin kx)$.

Задача 9. Найти $\int (5x + 7) e^{-2x} dx$.

Полагаем $u = 5x + 7$, следовательно $du = 5dx$. Тогда

$dv = e^{-2x} dx$, $v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int (5x + 7) e^{-2x} dx &= (5x + 7) \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) 5 dx = -\frac{1}{2} (5x + 7) e^{-2x} + \frac{5}{2} \int e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} (5x + 7) e^{-2x} - \frac{5}{4} e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

Мы не будем проводить дальнейшее алгебраическое упрощение данного выражения. (Надеемся, что читатели не обидятся на авторов за столь подробное изложение всех преобразований, в следующих примерах мы будем некоторые промежуточные моменты опускать.)

Задача 10. Найти $\int (3x^2 + 5x + 3) \cos 4x dx$.

Пусть $u = (3x^2 + 5x + 3)$, $du = (6x + 5) dx$.

Тогда $dv = \cos 4x dx$, $v = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (3x^2 + 5x + 3) \cos 4x dx = \frac{1}{4} (3x^2 + 5x + 3) \sin 4x - \frac{1}{4} \int (6x + 5) \sin 4x dx.$$

Мы получили интеграл подобного типа, только степень многочлена стала меньше. Применим еще раз метод интегрирования по частям.

Пусть $u = 6x + 5$, $du = 6dx$.

Тогда $dv = \sin 4x dx$, $v = \int \sin 4x dx = -\frac{1}{4} \cos 4x$.

Получаем

$$\begin{aligned} \int (3x^2 + 5x + 3) \cos 4x dx &= \frac{1}{4} (3x^2 + 5x + 3) \sin 4x - \frac{1}{4} \int (6x + 5) \sin 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} (3x^2 + 5x + 3) \sin 4x - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{4} (6x + 5) \cos 4x + \frac{6}{4} \int \cos 4x dx \right] = \\ &= \frac{1}{4} (3x^2 + 5x + 3) \sin 4x + \frac{1}{16} (6x + 5) \cos 4x - \frac{3}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

Ответ:

$$\int (3x^2 + 5x + 3) \cos 4x dx = \frac{1}{4} (3x^2 + 5x + 3) \sin 4x + \frac{1}{16} (6x + 5) \cos 4x - \frac{3}{32} \sin 4x + C$$

Если вы хорошо овладели навыками интегрирования, то можно явно не выписывать чему равно u и du , dv и v , проделывая промежуточные выкладки в уме. Покажем это на примере.

Задача 11. Найти $\int (7x + 1) \sin \frac{x}{2} dx$.

$$\begin{aligned} \int (7x + 1) \sin \frac{x}{2} dx &= -2 \int (7x + 1) d \left(\cos \frac{x}{2} \right) = -2(7x + 1) \cos \frac{x}{2} + 14 \int \cos \frac{x}{2} dx = \\ &= -2(7x + 1) \cos \frac{x}{2} + 28 \sin \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int (7x + 1) \sin \frac{x}{2} dx = -2(7x + 1) \cos \frac{x}{2} + 28 \sin \frac{x}{2} + C$.

Следующий тип интегралов, для которых применяется формула интегрирования по частям – это интегралы вида

$\int P_n(x) \ln^k x dx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n , k – целое положительное число. В этом случае принимается $u = \ln^k x$.

Задача 12. Найти $\int (4x + 9) \ln^2 x dx$.

Пусть $u = \ln^2 x$, значит $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$. Тогда $dv = (4x + 9) dx$,

$$v = \int (4x + 9) dx = (2x^2 + 9x).$$

$$\begin{aligned} \text{Получаем } \int (4x+9) \ln^2 x dx &= (2x^2+9x) \ln^2 x - \int (2x^2+9x) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= (2x^2+9x) \ln^2 x - 2 \int (2x+9) \ln x dx \end{aligned}$$

Теперь обозначим $u = \ln x$, значит $du = \frac{1}{x} dx$. Тогда $dv = (2x+9)dx$,

$$v = \int (2x+9)dx = (x^2+9x).$$

$$\begin{aligned} \text{Получаем } \int (4x+9) \ln^2 x dx &= (2x^2+9x) \ln^2 x - 2 \int (2x+9) \ln x dx = \\ &= (2x^2+9x) \ln^2 x - 2 \left[(x^2+9x) \ln x - \int (x^2+9x) \frac{1}{x} dx \right] = \\ &= (2x^2+9x) \ln^2 x - 2 \left[(x^2+9x) \ln x - \int (x+9) dx \right] = \\ &= (2x^2+9x) \ln^2 x - 2(x^2+9x) \ln x + (x^2+18x) + C. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int (4x+9) \ln^2 x dx = (2x^2+9x) \ln^2 x - 2(x^2+9x) \ln x + (x^2+18x) + C.$$

Существует еще один класс интегралов, при вычислении которых полезно применить формулу интегрирования по частям. Применяемый прием называется «интегрирование с возвратом». Суть его состоит в том, что в результате применения формулы интегрирования по частям мы получаем уравнение для искомого интеграла.

Приведем пример вычисления интегралов вида $\int e^{ax} \cos bxdx$ и $\int e^{ax} \sin bxdx$.

Задача 13. Найти $\int e^{ax} \cos bxdx$.

Пусть $u = \cos bx$. Значит $du = -b \sin bxdx$. Тогда $dv = e^{ax} dx$, $v = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$.

Получаем

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Далее обозначим $u = \sin bx$. Значит $du = b \cos bxdx$. Тогда, как и ранее

$$dv = e^{ax} dx, v = \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

Применяя еще раз формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx =$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx \right]$$

Раскрываем скобки

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Фактически мы получили уравнение для определения искомого интеграла $\int e^{ax} \cos bx dx$.

Переносим интеграл из правой части соотношения в левую

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx.$$

Получаем

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + C.$$

Задача 14. Найти $\int e^{3x} \sin 4x dx$.

Пусть $u = \sin 4x$. Значит $du = 4 \cos 4x dx$. Тогда $dv = e^{3x} dx$, $v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$.

Получаем

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx.$$

Далее обозначим $u = \cos 4x$. Значит $du = -4 \sin 4x dx$. Тогда, как и ранее

$dv = e^{3x} dx$, $v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$. Применяя еще раз формулу интегрирования по

частям, получаем

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx \right]$$

Раскрываем скобки

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9} e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx.$$

Переносим интеграл из правой части соотношения в левую

$$\left(1 + \frac{16}{9}\right) \int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9} e^{3x} \cos 4x.$$

Тогда

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{3}{25} e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{25} e^{3x} \cos 4x + C.$$

Аналогичным образом могут быть вычислены интегралы вида:

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx \text{ и } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Задача 15. Найти $\int \sqrt{x^2 + A} dx$.

Обозначим $u = \sqrt{x^2 + A}$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + A}}$, $v = \int dx = x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + A}} dx.$$

Преобразуем данное равенство к виду

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A} dx + \int \frac{A}{\sqrt{x^2 + A}} dx$$

Последний из интегралов в правой части является табличным. Вычисляя его, имеем

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = x\sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A} dx + A \ln |x + \sqrt{x^2 + A}|$$

Из полученного выражения следует

$$2 \int \sqrt{x^2 + A} dx = x\sqrt{x^2 + A} + A \ln |x + \sqrt{x^2 + A}|$$

Тогда

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + A}| + C.$$

Задача 16. Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Обозначим $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{-x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $v = \int dx = x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

Преобразуем данное равенство к виду

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

Последний из интегралов в правой части является табличным. Вычисляя его, получаем

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

Из полученного выражения следует

$$2 \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

Тогда

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей.

Напомним, что рациональной дробью называется выражение вида:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \text{ где } P_n(x), Q_m(x) - \text{многочлены степени } n \text{ и } m \text{ соответственно.}$$

Дробь называется правильной, если степень многочлена в числителе строго меньше степени многочлена в знаменателе. В противном случае дробь называется неправильной.

Известно, что всякая неправильная ($n \geq m$) дробь может быть представлена в виде

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + R_1(x), \text{ где } P_{n-m}(x) - \text{многочлен соответствующей}$$

степени, а $R_1(x)$ - правильная рациональная дробь.

Поскольку проблема интегрирования многочлена не представляет серьезных трудностей, то основной вопрос – это интегрирование правильных рациональных дробей.

Простейшими рациональными дробями называются следующие выражения:

$$1) \frac{A}{x-a}; 2) \frac{A}{(x-a)^n}; 3) \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; 4) \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где в последних двух выражениях $p^2 - 4q < 0$.

Известна теорема о том, что всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших рациональных дробей. Поясним вид такого представления.

$$\text{Пусть имеется правильная рациональная дробь } R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения линейных и квадратных множителей.

Предположим, что

$$Q_m(x) = (x-a)^l \cdot \dots \cdot (x-b)^r (x^2+px+q)^k \cdot \dots \cdot (x^2+sx+g)^i$$

Где $l, \dots, r, k, \dots, i$ - целые числа, $l + \dots + r + 2k + \dots + 2i = m$

$$p^2 - 4q < 0, \dots, s^2 - 4g < 0.$$

Тогда дробь $R(x)$ может быть представлена в виде

$$R(x) = \frac{A_l}{(x-a)^l} + \frac{A_{l-1}}{(x-a)^{l-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-a)} + \dots + \frac{B_r}{(x-b)^r} + \frac{B_{r-1}}{(x-b)^{r-1}} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} +$$

$$\frac{M_k x + N_k}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_{k-1} x + N_{k-1}}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)} + \dots +$$

$$+ \frac{S_i x + G_i}{(x^2 + sx + g)^i} + \frac{S_{i-1} x + G_{i-1}}{(x^2 + sx + g)^{i-1}} + \dots + \frac{S_1 x + G_1}{(x^2 + sx + g)}.$$

Методы определения коэффициентов разложения будут рассмотрены на конкретных примерах.

Приведем схему интегрирования простейших дробей.

$$1. \int \frac{A}{(x-a)} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A \ln|x-a| + C$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$$

3. Схема вычисления интегралов вида $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$ была изложена ранее.

4. Рассмотрим схему вычисления интегралов вида $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx$.

Выделив полный квадрат, представим квадратный трехчлен в виде

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}. \text{ Поскольку } q - \frac{p^2}{4} > 0, \text{ то обозначим}$$

$$q - \frac{p^2}{4} = m^2. \text{ Сделаем замену переменной } t = x + \frac{p}{2}, dt = dx, x = t - \frac{p}{2}.$$

Тогда имеем

$$\int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{(t^2 + m^2)^n} dt = M \int \frac{t dt}{(t^2 + m^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}.$$

Вычислим каждый интеграл отдельно.

$$\int \frac{t dt}{(t^2 + m^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}}$$

Рассмотрим схему вычисления второго интеграла $\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}$. Обозначим

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}. \text{ Его вычисление при } n=1 \text{ не представляет трудностей,}$$

$$\text{поскольку он является табличным интегралом } I_1 = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m}.$$

Далее наш метод состоит в том, чтобы получить рекуррентное соотношение, которое позволяет сводить вычисление $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^n}$ к вычислению

$$I_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{n-1}}.$$

Преобразуем интеграл к виду

$$I_n = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2 - t^2)dt}{(t^2 + m^2)^n} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{n-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + m^2)^n}$$

Это соотношение перепишем в виде

$$I_n = \frac{1}{m^2} I_{n-1} - \frac{1}{m^2} \int t \frac{tdt}{(t^2 + m^2)^n}$$

Для вычисления интеграла в правой части используем формулу интегрирования по частям. Обозначим:

$$u = t, \quad dv = \frac{tdt}{(t^2 + m^2)^n}. \quad \text{Тогда } du = dt,$$

$$v = \int \frac{tdt}{(t^2 + m^2)^n} = \frac{1}{2} \int (t^2 + m^2)^{-n} d(t^2 + m^2) = -\frac{1}{2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{m^2} I_{n-1} - \frac{1}{m^2} \left[-\frac{t}{2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}} + \int \frac{dt}{2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2m^2(n-1)} I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом } I_n = \frac{t}{2m^2(n-1)(t^2 + m^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2m^2(n-1)} I_{n-1}.$$

Задача 17. Найти $\int \frac{dx}{(x^2 + 10)^3}.$

Используя полученное рекуррентное соотношение, получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 10)^3} = \frac{x}{2 \cdot 10 \cdot (3-1)(x^2 + 10)^2} + \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 10 \cdot (3-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + 10)^2}.$$

Используем еще один раз рекуррентное соотношение.

Тогда

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 10)^3} = \frac{x}{40(x^2 + 10)^2} + \frac{3}{40} \left[\frac{x}{20(x^2 + 10)} + \frac{1}{20} \int \frac{dx}{(x^2 + 10)} \right]$$

Вычисление последнего интеграла не представляет трудностей.

Следовательно

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 10)^3} = \frac{x}{40(x^2 + 10)^2} + \frac{3x}{800(x^2 + 10)} + \frac{3}{800\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{10}} + C$$

Далее приведем примеры интегрирования рациональных дробей.

Задача 18. Найти $\int \frac{4x^2 - x - 9}{(x+2)(x+1)(x-1)} dx$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, является правильной рациональной дробью. Представление этой дроби в виде суммы простейших дробей ищем в виде

$$\frac{4x^2 - x - 9}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x-1)}.$$

Осталось определить неизвестные пока коэффициенты A, B, C .

Приведем правую часть к общему знаменателю, который равен

$(x+2)(x+1)(x-1)$ - знаменателю в левой части выражения и приравняем числители в правой и левой частях. Получим

$$4x^2 - x - 9 = A(x+1)(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+1). \quad (1)$$

В соотношении (1) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и получаем систему уравнений для определения A, B, C .

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ B + 3C = -1 \\ -A - 2B + 2C = -9 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, находим коэффициенты. Отметим, что в данном случае нет необходимости решать систему уравнений, поскольку неизвестные коэффициенты можно определить более простым путем.

Равенство (1) рассматриваем как равенство многочленов, верное для любых значений x . Подставим в левую и правую части этого равенства $x = -2$.

Получим

$$9 = 3A, \quad A = 3.$$

Подставляя $x = -1$, имеем

$$-4 = -2B, \quad B = 2.$$

Подстановка $x = 1$ дает

$$-6 = 6C, \quad C = -1.$$

Следовательно

$$\frac{4x^2 - x - 9}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{3}{(x+2)} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{(x-1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - x - 9}{(x+2)(x+1)(x-1)} dx &= \int \left[\frac{3}{(x+2)} + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{(x-1)} \right] dx = \\ &= 3 \int \frac{d(x+2)}{(x+2)} + 2 \int \frac{d(x+1)}{(x+1)} - \int \frac{d(x-1)}{(x-1)} = 3 \ln|x+2| + 2 \ln|x+1| - \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Ответ: $\int \frac{4x^2 - x - 9}{(x+2)(x+1)(x-1)} dx = 3 \ln|x+2| + 2 \ln|x+1| - \ln|x-1| + C$

Задача 19. Найти $\int \frac{4x-8}{(x-3)(x-1)^2} dx$

Поскольку дробь правильная, то представим ее в виде суммы простейших дробей вида

$$\frac{4x-8}{(x-3)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)}.$$

Приводя к общему знаменателю, и, приравнявая числители в левой и правой частях, получаем

$$4x-8 = A(x-1)^2 + B(x-3) + C(x-3)(x-1). \quad (2)$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и получаем систему уравнений для определения A, B, C .

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-4C=4 \\ A-3B+3C=-8 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим коэффициенты. Отметим, что в данном случае нет необходимости полностью решать систему уравнений, поскольку часть неизвестных коэффициентов можно определить более простым путем. Равенство (2) рассматриваем как равенство многочленов, верное для любых значений x . Подставим в левую и правую части этого равенства $x=3$. Получим

$$4 = 4A, \quad A=1.$$

Подставим в левую и правую части этого равенства $x=1$. Получим $-4 = -2B, \quad B=2$.

Из первого уравнения системы находим

$$C = -1.$$

Тогда

$$\frac{4x-8}{(x-3)(x-1)^2} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-8}{(x-3)(x-1)^2} dx &= \int \left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} \right] dx = \\ &= \int \frac{d(x-3)}{(x-3)} + 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} - \int \frac{d(x-1)}{(x-1)} = \ln|x-3| - \frac{2}{x-1} - \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{4x-8}{(x-3)(x-1)^2} dx = \ln|x-3| - \frac{2}{x-1} - \ln|x-1| + C.$$

Задача 20. Найти $\int \frac{11x^3 - 34x^2 + 32x}{4(x-1)^2(x-2)(x-4)} dx$

Разложим это выражение на простейшие дроби

$$\frac{11x^3 - 34x^2 + 32x}{(x-1)^2(x-2)(x-4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-4}.$$

Определяем коэффициенты

$$11x^3 - 34x^2 + 32x =$$

$$= A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-2)(x-4) + C(x-1)^2(x-4) + D(x-1)^2(x-2)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$\begin{cases} B + C + D = 11 \\ A - 7B - 6C - 4D = -34 \\ -6A + 15B + 9C + 5D = 32 \\ 8A - 8B - 4C - 2D = 0 \end{cases}$$

Часть коэффициентов определим независимым путем.

Полагая $x = 1, x = 2, x = 4$ получаем

$$3A = 9, A = 3;$$

$$-2C = 16, C = -8;$$

$$18D = 288, D = 16.$$

Тогда $B = 3$.

Следовательно

$$\int \frac{11x^3 - 34x^2 + 32x}{4(x-1)^2(x-2)(x-4)} dx = \int \left[\frac{3}{4(x-1)^2} + \frac{3}{4(x-1)} - \frac{2}{x-2} + \frac{4}{x-4} \right] dx =$$

$$= \frac{3}{4} \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} dx + \frac{3}{4} \int \frac{d(x-1)}{(x-1)} dx - 2 \int \frac{d(x-2)}{(x-2)} dx + 4 \int \frac{d(x-4)}{(x-4)} dx =$$

$$= -\frac{3}{4(x-1)} + \frac{3}{4} \ln|x-1| - 2 \ln|x-2| + 4 \ln|x-4| + C$$

Ответ:

$$\int \frac{11x^3 - 34x^2 + 32x}{4(x-1)^2(x-2)(x-4)} dx = -\frac{3}{4(x-1)} + \frac{3}{4} \ln|x-1| - 2 \ln|x-2| + 4 \ln|x-4| + C$$

Задача 21. Найти $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx$.

Подынтегральное выражение является неправильной рациональной дробью. Представим его в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Для этого используем схему деления многочлена на многочлен

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} -x^4 + 1 \\ x^4 - x^3 \\ \hline -x^3 + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^3 - x^2 \\ \hline x + 1 \end{array} \\ \begin{array}{r} -x^3 + 1 \\ x^3 - x^2 \\ \hline x^2 + 1 \end{array} \end{array}$$

Следовательно

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} = (x + 1) + \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)}$$

Полученную правильную рациональную дробь $\frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)}$ представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - 1}$$

Приводя к общему знаменателю, и, приравнявая числители в левой и правой частях, получаем

$$x^2 + 1 = A(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx^2$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , имеем систему уравнений

$$\begin{cases} B + C = 1; \\ A - B = 0; \\ -A = 1. \end{cases}$$

Решением этой системы являются: $A = -1$; $B = -1$; $C = 2$.

$$\text{Тогда } \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx = \int \left[x + 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1} \right] dx =$$

$$= \int x dx + \int dx - \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{d(x - 1)}{x - 1} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x} - \ln|x| + 2 \ln|x - 1| + C.$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x} - \ln|x| + 2 \ln|x - 1| + C.$$

Задача 22. Найти $\int \frac{x - 2}{x^3 - 1} dx = \int \frac{x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} dx.$

Правильную рациональную дробь $\frac{x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$ представим в виде суммы простейших дробей

$$\frac{x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

Приводя к общему знаменателю, и, приравнявая числители в левой и правой частях, получаем

$$x - 2 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 0; \\ A - B + C = 1; \\ A - C = -2. \end{cases}$$

Коэффициент A можно найти непосредственно подстановкой $x = 1$ в исходное уравнение. Получаем

$$-1 = 3A, \text{ то есть } A = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Тогда } B = \frac{1}{3}, C = \frac{5}{3}$$

$$\int \frac{x-2}{x^3-1} dx = \int \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{1}{3} \int \frac{(x+5)dx}{(x^2+x+1)} =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2} + 5}{(x^2+x+1)} dx =$$

$$-\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+x+1)} + \frac{9}{6} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)} =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} + \frac{3}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]} =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{x-2}{x^3-1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x-1| + \frac{1}{6} \ln|x^2+x+1| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегралы, сводящиеся к интегрированию рациональных дробей.

Рациональной функцией $R(x)$ будем называть функцию, при вычислении которой используются следующие математические операции: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень.

Интегралы вида $\int R(e^x)dx$.

Данный интеграл сводится к интегрированию рациональных дробей заменой переменной $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

После подстановки получаем

$$\int R(e^x)dx = \int \frac{R(t)}{t} dt.$$

Полученное выражение является рациональной дробью.

Задача 23. Найти $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 4e^x + 4} dx$.

Сделаем замену переменной $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

После подстановки получаем $\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 4e^x + 4} dx = \int \frac{t + 1}{(t^2 + 4t + 4)t} dt = \int \frac{t + 1}{(t + 2)^2 t} dt$.

Выражение, стоящее под знаком интеграла, является правильной рациональной дробью. Представление этой дроби в виде суммы простейших дробей ищем в виде

$$\frac{t + 1}{(t + 2)^2 t} = \frac{A}{(t + 2)^2} + \frac{B}{(t + 2)} + \frac{C}{t}.$$

Осталось определить неизвестные пока коэффициенты A , B , C .

Приведем правую часть к общему знаменателю, который равен $(t + 2)^2 t$ - знаменателю в левой части выражения, и приравняем числители в правой и левой частях. Получим

$$t + 1 = At + B(t + 2) + C(t + 2)^2.$$

В полученном соотношении приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t и получаем систему уравнений для определения A , B , C .

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 2B + 4C = 1 \\ 4C = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим коэффициенты.

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$\int \frac{t+1}{(t+2)^2 t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+2)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t+2)} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{4} \ln|t+2| + \frac{1}{4} \ln|t| + C$$

Подставляя $t = e^x$, получаем

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} + 4e^x + 4} dx = -\frac{1}{2(e^x + 2)} - \frac{1}{4} \ln(e^x + 2) + \frac{1}{4} x + C$$

Задача 24. Найти $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 6e^x + 10} dx$.

Сделаем замену переменной $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

После подстановки получаем

$$\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 6e^x + 10} dx = \int \frac{t - 1}{(t^2 - 6t + 10)t} dt$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, является правильной рациональной дробью. Представление этой дроби в виде суммы простейших дробей ищем в виде

$$\frac{t - 1}{(t^2 - 6t + 10)t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 - 6t + 10}.$$

Осталось определить неизвестные пока коэффициенты A , B , C .

Приведем правую часть к общему знаменателю, который равен $(t^2 - 6t + 10)t$ - знаменателю в левой части выражения, и приравняем числители в правой и левой частях. Получим

$$t - 1 = A(t^2 - 6t + 10) + (Bt + C)t.$$

В полученном соотношении приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t и получаем систему уравнений для определения A , B , C .

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -6A + C = 1 \\ 10A = -1 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим коэффициенты.

$$A = -\frac{1}{10}, B = \frac{1}{10}, C = \frac{4}{10}.$$

Тогда

$$\int \frac{t - 1}{(t^2 - 6t + 10)t} dt = -\frac{1}{10} \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{10} \int \frac{(t + 4)dt}{t^2 - 6t + 10} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{10} \ln|t| + \frac{1}{10} \int \frac{\frac{1}{2}(2t-6) + 4 + 3}{t^2 - 6t + 10} dt = \\
&= -\frac{1}{10} \ln|t| + \frac{1}{20} \int \frac{(2t-6)dt}{t^2 - 6t + 10} + \frac{7}{10} \int \frac{1}{t^2 - 6t + 10} dt = \\
&= -\frac{1}{10} \ln|t| + \frac{1}{20} \int \frac{d(t^2 - 6t + 10)}{t^2 - 6t + 10} + \frac{7}{10} \int \frac{d(t-3)}{(t-3)^2 + 1} = \\
&= -\frac{1}{10} \ln|t| + \frac{1}{20} \ln|t^2 - 6t + 10| + \frac{7}{10} \operatorname{arctg}(t-3) + C
\end{aligned}$$

Подставляя $t = e^x$, получаем

$$\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 6e^x + 10} dx = -\frac{x}{10} + \frac{1}{20} \ln(e^{2x} - 6e^x + 10) + \frac{7}{10} \operatorname{arctg}(e^x - 3) + C.$$

Задача 25. Найти $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x} + 6e^x - 16} dx$.

Сделаем замену переменной $e^x = t$. Тогда $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\text{После подстановки получаем } \int \frac{e^x + 4}{e^{2x} + 6e^x - 16} dx = \int \frac{t + 4}{(t^2 + 6t - 16)t} dt = \int \frac{t + 4}{(t-2)(t+8)t} dt.$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла, является правильной рациональной дробью. Представление этой дроби в виде суммы простейших дробей ищем в виде

$$\frac{t + 4}{(t-2)(t+8)t} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+8} + \frac{C}{t}.$$

Осталось определить неизвестные пока коэффициенты А, В, С.

Приведем правую часть к общему знаменателю, который равен $(t-2)(t+8)t$ - знаменателю в левой части выражения, и приравняем числители в правой и левой частях. Получим

$$t + 4 = A(t+8)t + B(t-2)t + C(t-2)(t+8).$$

В полученном соотношении приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях t и получаем систему уравнений для определения А, В, С.

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ 8A - 2B + 6C = 1, \\ -16C = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим коэффициенты.

$$A = \frac{3}{10}, B = -\frac{1}{20}, C = -\frac{1}{4}.$$

Тогда

$$\int \frac{t+4}{(t-2)(t+8)t} dt = \frac{3}{10} \int \frac{dt}{t-2} - \frac{1}{20} \int \frac{dt}{t+8} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{3}{10} \ln|t-2| - \frac{1}{20} \ln|t+8| - \frac{1}{4} \ln|t| + C.$$

Подставляя $t = e^x$, получаем

$$\int \frac{e^x + 4}{e^{2x} + 6e^x - 16} dx = \frac{3}{10} \ln|e^x - 2| - \frac{1}{20} \ln|e^x + 8| - \frac{1}{4} x + C.$$

$$\text{Интегралы вида } \int R \left[(ax+b)^{\frac{m}{n}}, (ax+b)^{\frac{r}{s}}, \dots, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, x \right] dx.$$

Данный неопределенный интеграл сводится к интегрированию рациональной дроби по следующей схеме.

Обозначим через k - наименьшее общее кратное чисел $(n, s, \dots, q)$. (На всякий случай напомним, что наименьшим общим кратным для некоторого множества целых чисел называется такое наименьшее целое число, которое делится без остатка на все числа данного множества.)

Сделаем замену переменной $ax+b = t^k$. Тогда $x = \frac{t^k - b}{a}$, $dx = \frac{kt^{k-1}}{a} dt$.

После указанной замены подынтегральное выражение превращается в рациональную дробь.

Рассмотрим примеры.

Задача 26. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}}$.

Подынтегральная функция содержит $\sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{3}}$. Надеемся, что не требует долгих объяснений тот факт, что наименьшим целым числом, которое делится на 2 и на 3 является число 6.

Сделаем замену $x-1 = t^6$, $t = \sqrt[6]{x-1}$. Тогда $x = t^6 + 1$, $dx = 6t^5 dt$. Напомним, что

$$(a^m)^n = a^{mn}. \text{ Следовательно } \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}} = (t^6)^{\frac{1}{2}} = t^3, \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{3}} = (t^6)^{\frac{1}{3}} = t^2.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 - t^2} = \int \frac{6t^3 dt}{t-1}.$$

Выражение, стоящее под знаком интеграла является неправильной рациональной дробью. Следовательно, его можно представить как сумму многочлена и правильной рациональной дроби.

Имеем

$$\frac{6t^3}{t-1} = 6 \frac{t^3 - 1 + 1}{t-1} = 6 \left[\frac{t^3 - 1}{t-1} + \frac{1}{t-1} \right] = 6 \left[\frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} \right] = 6 \left[t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right]$$

Следовательно

$$\int \frac{6t^3 dt}{t-1} = 6 \int \left[t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right] dt = 6 \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right] + C$$

Подставляя $t = \sqrt[6]{x-1}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1}} = 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[6]{x-1} + 6\ln|\sqrt[6]{x-1} - 1| + C.$$

Задача 27. Найти $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$.

Сделаем замену переменной $2x+1 = t^3$. Тогда $t = \sqrt[3]{2x+1}$, $x = \frac{t^3-1}{2}$,

$dx = \frac{3}{2} t^2 dt$. Тогда получаем

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx = \int \frac{\frac{t^3-1}{2}}{t} \cdot \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{3}{4} \int (t^4 - t) dt = \frac{3}{20} t^5 - \frac{3}{8} t^2 + C.$$

Подставляя $t = \sqrt[3]{2x+1}$, получаем окончательный ответ

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx = \frac{3}{20} (2x+1)^{\frac{5}{3}} \sqrt{(2x+1)^2} - \frac{3}{8} \sqrt[3]{(2x+1)^2} + C.$$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

Данный интеграл сводится к интегрированию рациональных дробей путем следующей замены. Обозначим $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

Из школьного курса тригонометрии известны формулы выражения синуса и косинуса через тангенс половинного угла. На всякий случай мы напомним эти формулы. Для тех, кто их успел забыть, это будет не вредно, а те, кто еще их помнит, надеемся, не обидятся на нас.

Итак:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Такая подстановка приводит вычисление исходного интеграла к интегрированию рациональной дроби.

Задача 28. Найти $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Сделаем замену переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t+1-t^2} = -2 \int \frac{dt}{t^2-2t-1} = -2 \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2-2} = \\ &= -2 \int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 - (\sqrt{2})^2} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-1-\sqrt{2}}{t-1+\sqrt{2}} \right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

(Мы не стали делать подробных пояснений при вычислении данного интеграла, поскольку надеемся, что к этому моменту Вы овладели техникой вычисления интегралов, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе.) Таким образом

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

Найти $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$.

Используя замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получаем

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{2dt}{2t+2} = \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C.$$

$$\text{То есть } \int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C.$$

При дальнейшем изложении материала мы будем исходить из того, что к данному моменту Вы уже овладели некоторой техникой интегрирования, и поэтому будем позволять себе «такую роскошь» как несколько менее подробные пояснения и менее подробные промежуточные выкладки.

Рассмотрим еще один класс интегралов – интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Конечно, читатель может задать вопрос: «Поскольку $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то данный

тип интегралов уже рассмотрен, и чем вызвана причина их отдельного изучения?». Он конечно прав. Однако существует замена переменной, которая позволяет вычислить этот интеграл в некоторых случаях более просто. В этом случае такой заменой является $t = \operatorname{tg} x$. Тогда $x = \arctg t$,

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$. После такой подстановки вычисление интеграла сводится к интегрированию рациональной дроби.

Задача 29. Найти $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

Сначала убедимся, что данный интеграл действительно относится к указанному типу. Для этого преобразуем данное выражение

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + 1} dx = \int \frac{tgx}{tgx + 1} dx = \int \frac{t}{t+1} \cdot \frac{dt}{t^2+1} = \int \frac{tdt}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Выражение $\frac{t}{(t+1)(t^2+1)}$ является правильной рациональной дробью и может быть разложено в сумму простейших рациональных дробей. Имеем

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

После приведения к общему знаменателю в правой и левой частях получаем $t = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1)$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0; \\ B+C=1; \\ A+C=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{(t+1)(t^2+1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2} \int \frac{t+1}{t^2+1} dt = -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \int \frac{tdt}{t^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{4} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} = -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{4} \ln|t^2+1| + \frac{1}{2} \arctgt + C = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|tgx+1| + \frac{1}{4} \ln|tg^2x+1| + \frac{1}{2} \arctg(tgx) + C = -\frac{1}{2} \ln|tgx+1| + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1}{\cos^2 x} \right| + \frac{1}{2} x + C = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

$$\text{Получаем } \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = -\frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C.$$

Задача 30. Найти $\int tg^3 x dx$

После замены переменной $t = tgx$ получаем

$$\begin{aligned}\int tg^3 x dx &= \int \frac{t^3}{t^2+1} dt = \int \frac{t^3+t-t}{t^2+1} dt = \int \frac{t(t^2+1)-t}{t^2+1} dt = \int \left(t - \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \int t dt - \int \frac{t dt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C = \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(tg^2 x + 1) + C.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\int tg^3 x dx = \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(tg^2 x + 1) + C.$$

Тригонометрические подстановки в интегралах, содержащих выражения $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$.

В этих случаях полезны следующие подстановки.

Для случая выражения $\sqrt{a^2 - x^2}$ используется замена $x = a \sin t$. Тогда $dx = a \cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cos t$.

Для случая выражения $\sqrt{a^2 + x^2}$ используется замена $x = atg t$. Тогда $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2 t} = a \sqrt{1 + tg^2 t} = \frac{a}{\cos t}$.

Для случая выражения $\sqrt{x^2 - a^2}$ используется замена $x = \frac{a}{\cos t}$. Тогда $dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{a \sin t}{\cos t}$.

Задача 31. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Сделаем замену $x = 2 \sin t$. Тогда $dx = 2 \cos t dt$, $\sqrt{(4-x^2)^3} = \sqrt{(4-4 \sin^2 t)^3} = \sqrt{4^3 (1 - \sin^2 t)^3} = 8 \cos^3 t$.

Следовательно $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \int \frac{2 \cos t}{8 \cos^3 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} tg t + C =$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} + C = \frac{\sin t}{4 \sqrt{1 - \sin^2 t}} + C = \frac{\frac{x}{2}}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} + C = \frac{x}{4 \sqrt{4 - x^2}} + C.$$

Получаем $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{x}{4 \sqrt{4-x^2}} + C$.

Задача 32. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Сделаем замену $x = 3tg t$. Тогда $dx = \frac{3dt}{\cos^2 t}$,

$$\sqrt{(9+x^2)^3} = \sqrt{(9+9tg^2 t)^3} = \sqrt{9^3 (1+tg^2 t)^3} = \frac{27}{\cos^3 t}.$$

Следовательно $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \int \frac{\frac{3dt}{\cos^3 t}}{\frac{\cos^2 t}{27}} dt = \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C =$

$$= \frac{1}{9} \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t}} + C = \frac{1}{9} \sqrt{\frac{tg^2 t}{tg^2 t + 1}} + C = \frac{1}{9} \sqrt{\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 1}} + C = \frac{x}{9\sqrt{x^2 + 9}} + C.$$

Получаем $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \frac{x}{9\sqrt{x^2 + 9}} + C.$

Задача 33. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}.$

Сделаем замену $x = \frac{1}{\cos t}$. Тогда $dx = \frac{\sin t dt}{\cos^2 t},$

$$\sqrt{(x^2 - 1)^3} = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}\right)^3} = \frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}.$$

Следовательно $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \int \frac{\frac{\sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{\sin^3 t}{\cos^3 t}} dt = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d \sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} + C = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} + C = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C.$$

Получаем $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C.$

В заключение данного раздела рассмотрим методы интегрирования некоторых функций, которые непосредственно не входят в контрольную работу, но знание этих методов будет полезно при подготовке к экзамену.

Интегралы вида $\int \cos nx \cos mx dx, \int \sin nx \sin mx dx, \int \sin nx \cos mx dx.$

Напомним некоторые формулы тригонометрии:

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)];$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)].$$

Задача 34. Найти $\int \cos 5x \cos 3x dx.$

Решение. $\int \cos 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 8x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 8x dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$

$$= \frac{1}{16} \int \cos 8x d(8x) + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Задача 35. Найти $\int \sin 4x \sin x dx$.

Решение. $\int \sin 4x \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \int \cos 3x dx - \frac{1}{2} \int \cos 5x dx =$
 $= \frac{1}{6} \int \cos 3x d(3x) - \frac{1}{10} \int \cos 5x d(5x) = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{10} \sin 5x + C.$

Найти $\int \sin 7x \cos 2x dx$.

Решение. $\int \sin 7x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 9x + \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 9x dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x dx =$
 $= \frac{1}{18} \int \sin 9x d(9x) + \frac{1}{10} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{18} \cos 9x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.$

Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$.

Рассмотрим два случая вычисления таких интегралов.

Первый случай – это когда, по крайней мере, один из показателей степени n или m является нечетным числом. Будем считать для определенности m нечетным числом, то есть $m = 2k + 1$. Обозначим $t = \sin x$. Следовательно $dt = \cos x dx$.

Тогда $\int \sin^n x \cos^m x dx = \int (\sin x)^n (\cos^{2k} x) (\cos x dx) = \int (\sin x)^n (\cos^2 x)^k (\cos x dx) =$
 $= \int (\sin x)^n (1 - \sin^2 x)^k (d \sin x) = \int (t)^n (1 - t^2)^k dt.$

Полученное подынтегральное выражение является многочленом и его интегрирование (мы на это все-таки надеемся) не вызовет затруднений.

Задача 36. Найти $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Пусть $t = \sin x$. Тогда $dt = \cos x dx$.

Имеем $\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int (\sin x)^4 (\cos^4 x) (\cos x dx) = \int (\sin x)^4 (\cos^2 x)^2 (d \sin x) =$
 $= \int (\sin x)^4 (1 - \sin^2 x)^2 (d \sin x) = \int (t)^4 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt =$
 $= \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$

Задача 37. Найти $\int \sin^3 x dx$.

Пусть $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x dx$.

Имеем $\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x (\sin x dx) = -\int (1 - \cos^2 x) (d \cos x) = -\int (1 - t^2) dt =$
 $= -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$

Второй случай – оба показателя степени n и m являются четными числами.

В этом случае для понижения степени используются формулы

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Задача 38. Найти $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \sin^2 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \int \cos 2x (d 2x) - \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{64} \int \cos 4x (d 4x) - \frac{1}{16} \int (1 - \sin^2 2x) (d \sin 2x) = \\ &= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Таким образом $\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C$.

Замечания:

- при вычислении $\int \cos^2 2x dx$ мы воспользовались формулой двойного угла $\cos 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$;

- при вычислении $\int \cos^3 2x dx$ мы воспользовались правилом интегрирования в случае, когда, по крайней мере, одна из степеней нечетная.

Задача 39. Найти $\int \sin^4 x dx$.

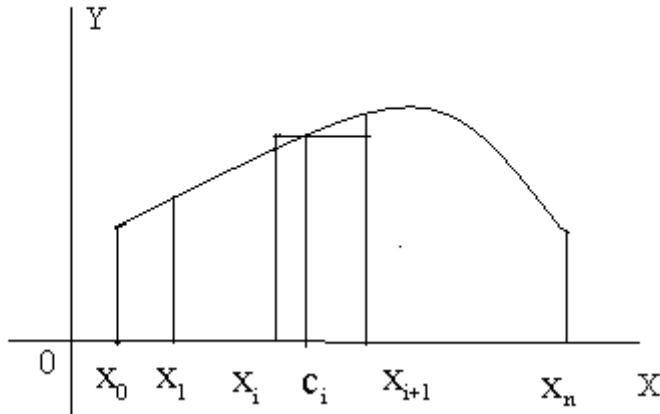
$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{32} \int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

Получаем $\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$.

2.ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Прежде чем перейти к непосредственному решению примеров, напомним некоторые факты теоретического курса.

Начнем с самого понятия определенного интеграла.



Фиг.1

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$ и $f(x) \geq 0$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (фиг.1) точками $x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ ($x_0 = a, x_n = b$).

Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, где Δx_i - длина отрезка $[x_i; x_{i+1}]$. На отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ выберем произвольную точку c_i . Вычислим значение функции $y = f(x)$ в этой точке $y_i = f(c_i)$. Интуитивно понятно, что величина $f(c_i)\Delta x_i$ при малом значении Δx_i будет не очень сильно отличаться от площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = x_i, x = x_{i+1}, y = 0, y = f(x)$.

Тогда сумма таких площадей по всем отрезкам разбиения $\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i$ будет близка к площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$.

Теперь перейдем к более строгим рассуждениям. Назовем интегральной суммой I_n сумму вида $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i$.

Заметим, что значение интегральной суммы зависит и от способа разбиения и от способа выбора точек c_i . Введем еще одну характеристику разбиения – параметр λ , где λ - наибольший из отрезков разбиения $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, то есть $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i$.

Определение. Если существует предел интегральных сумм при $\lambda \rightarrow 0$, и этот предел не зависит ни от способа разбиения, ни от способа выбора точек c_i , то функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на

отрезке $[a; b]$, а значение предела называется определенным интегралом от данной функции по отрезку $[a; b]$, и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \Delta x_i.$$

Возникает естественный вопрос, а существуют ли вообще такие функции, для которых это понятие имеет смысл. Мы не будем приводить доказательство, а просто сформулируем известный факт: **«Всякая функция, непрерывная на отрезке, является интегрируемой по этому отрезку».** (Отметим, что непрерывными функциями не исчерпывается класс интегрируемых функций.)

Сформулируем свойства определенного интеграла. При формулировке свойств мы будем предполагать, что речь идет о функциях, интегрируемых по отрезку.

1. $\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$, где A – постоянная величина.
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Кроме того, по определению полагают

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \text{ при } b < a.$$

Далее перейдем к формуле Ньютона-Лейбница, которая устанавливает связь между неопределенным и определенным интегралом.

Пусть функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- это соотношение и называется формулой Ньютона-Лейбница.

Символически это часто записывается следующим образом

Если $F'(x) = f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$.

Запись $F(x) \Big|_a^b$ - читается «эф от икс в подстановке от а до бэ», а математически эта подстановка означает

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Следовательно, при известной первообразной вычисление определенного интеграла не должно представлять принципиальных затруднений, если не считать, конечно, таковыми подстановку чисел в известную формулу.

Задача 40. Найти. $\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20.$

(Мы надеемся, что без особых пояснений понятно, что функция $y = \frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $y = x^3$. А если это не так, то все предыдущие страницы пособия написаны напрасно.)

Приведем еще два метода, которые используются достаточно часто при вычислении определенных интегралов.

Формула интегрирования по частям.

Напомним, что в случае неопределенного интеграла формула интегрирования по частям записывалась в виде

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Для определенного интеграла имеем

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Формула замены переменной.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x) dx$ и сделана замена переменной

интегрирования $x = \varphi(t)$, где $x = \varphi(t)$ - монотонная непрерывная функция на отрезке $[\alpha; \beta]$, имеющая непрерывную производную на этом отрезке.

Тогда $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$

Касаясь этой формулы, отметим, что при замене переменной меняется не только подынтегральное выражение, но и пределы интегрирования. Об этом студенты иногда (скажем мягко) забывают.

Далее перейдем к решению задач.

Задача 41. Вычислить $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx$

Найдем первообразную функции $y = \frac{2x+1}{x^2+2x+2}$. При ее вычислении воспользуемся методом интегрирования выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx &= \int \frac{(2x+2)-1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2} - \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \\ &= \int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \ln(x^2+2x+2) - \operatorname{arctg}(x+1)\end{aligned}$$

Отметим, что при вычислении определенного интеграла значение произвольной постоянной не играет роли, поэтому мы положили ее значение равным нулю.

Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+2x+2} dx &= \\ \left[\ln(x^2+2x+2) - \operatorname{arctg}(x+1) \right]_0^1 &= [\ln 5 - \operatorname{arctg} 2] - [\ln 2 - \operatorname{arctg} 1] = \\ &= \ln \frac{5}{2} - \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

На всякий случай, напомним: 1) $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$; 2) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Задача 42. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x dx$.

При решении этого примера воспользуемся методом интегрирования выражений вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ в случае, когда оба показателя степени четные.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^2 x dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{8} \int (1+\cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x.\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x dx = \left(\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32} - \frac{1}{32} \sin \pi - 0 = \frac{\pi}{32}.$$

Задача 43. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^3 x dx$.

При решении этого примера воспользуемся методом интегрирования выражений вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ в случае, когда, по крайней мере, один из показателей степени является нечетным числом.

Сделаем замену переменных $t = \cos x$. Тогда $dt = -\sin x dx$, $\sin^3 x dx = (1 - \cos^2 x) \sin x dx = -(1 - t^2) dt$. Определим новые пределы

интегрирования. Имеем: $x = 0$, $t = \cos 0 = 1$; $x = \frac{\pi}{4}$, $t = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно,
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^3 x dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 (1-t^2) dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 (t^2 - t^4) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] - \left[\frac{2\sqrt{2}}{24} - \frac{4\sqrt{2}}{160} \right] = \frac{2}{15} - \frac{7\sqrt{2}}{120}.$$

Задача 44. Вычислить
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + \sin x + 1}.$$

Воспользуемся методом интегрирования выражений вида $\int R(\sin x; \cos x) dx$ и сделаем замену переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Определим новые пределы интегрирования: $x = 0, t = \operatorname{tg} 0 = 0$; $x = \frac{\pi}{2}, t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Следовательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x + \sin x + 1} = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln(t+1) \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Задача 45. Вычислить
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x}.$$

Данный интеграл перепишем в виде $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}$ и сделаем замену

$t = \operatorname{tg} x$. Тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Определим новые пределы интегрирования:

$$x = 0, t = \operatorname{tg} 0 = 0; \quad x = \frac{\pi}{4}, t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Следовательно
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}.$$

Выражение $\frac{1}{(t+1)(t^2+1)}$ является правильной рациональной дробью, и может

быть представлено как сумма простейших рациональных дробей в виде:

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}.$$

Приводя левую и правую части к общему знаменателю и, отбрасывая его, получаем

$$1 = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1).$$

Для определения неизвестных коэффициентов получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0; \\ B+C=0; \\ A+C=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{tdt}{(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2+1)} = \frac{1}{2} \ln(t+1) - \frac{1}{4} \int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)} + \frac{1}{2} \arctgt = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t+1) - \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \arctgt. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\sin x + \cos x} &= \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)} = \left[\frac{1}{2} \ln(t+1) - \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \arctgt \right]_0^1 = \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \arctg 1 \right] - 0 = \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Задача 46. $\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}.$

Сделаем замену переменной $x=t^6$, $t=\sqrt[6]{x}$. Тогда $dx=6t^5 dt$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$.

Определим пределы интегрирования: $x=0, t=\sqrt[6]{0}=0$; $x=64, t=\sqrt[6]{64}=2$.

Получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} &= \int_0^2 \frac{6t^5 dt}{t^3 + 2t^2} = 6 \int_0^2 \frac{t^3 dt}{t+2} = 6 \int_0^2 \frac{(t^3+8)-8}{t+2} dt = 6 \int_0^2 \frac{t^3+8}{t+2} dt - 48 \int_0^2 \frac{1}{t+2} dt = \\ &= 6 \int_0^2 (t^2 - 2t + 4) dt - 48 \int_0^2 \frac{dt}{t+2} = 6 \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t \right) \Big|_0^2 - 48 \ln(t+2) \Big|_0^2 = \\ &= 6 \left(\frac{8}{3} - 4 + 8 \right) - 0 - 48(\ln 4 - \ln 2) = 40 - 48 \ln 2. \end{aligned}$$

(Мы воспользовались: 1) формулой суммы кубов $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, в данном примере $t^3+8=t^3+2^3=(t+2)(t^2-2t+4)$; 2) свойством логарифма

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$, в данном примере $\ln 4 - \ln 2 = \ln 2$).

Задача 47. Вычислить $\int_{-1}^1 x^2 \cos \frac{\pi}{2} x dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Пусть $u=x^2$,

$dv = \cos \frac{\pi}{2} x dx$, тогда $du = 2x dx$, $v = \int \cos \frac{\pi}{2} x dx = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x$.

Получаем

$$\int_{-1}^1 x^2 \cos \frac{\pi}{2} x dx = \frac{2}{\pi} x^2 \sin \frac{\pi}{2} x \Big|_{-1}^1 - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 x \sin \frac{\pi}{2} x dx.$$

Воспользуемся еще один раз формулой интегрирования по частям: $u = x$, $du = dx$; $dv = \sin \frac{\pi}{2} x dx$, $v = \int \sin \frac{\pi}{2} x dx = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^2 \cos \frac{\pi}{2} x dx &= \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] - \frac{4}{\pi} \left[-\frac{2}{\pi} x \cos \frac{\pi}{2} x \Big|_{-1}^1 + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi}{2} x dx \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} x \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{4}{\pi} - \frac{16}{\pi^3} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{4}{\pi} - \frac{32}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Задача 48. Вычислить $\int_1^{e^6} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \ln x dx$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям. Пусть $u = \ln x$, $dv = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sqrt[3]{x}$.

Получаем

$$\begin{aligned} \int_1^{e^6} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \ln x dx &= 3\sqrt[3]{x} \ln x \Big|_1^{e^6} - 3 \int_1^{e^6} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} dx = 3\sqrt[3]{e^6} \ln e^6 - 3 \ln 1 - 3 \int_1^{e^6} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \\ &= 18e^2 - 9\sqrt[3]{x} \Big|_1^{e^6} = 18e^2 - (9\sqrt[3]{e^6} - 9) = 9(e^2 + 1) \end{aligned}$$

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассматриваются два типа несобственных интегралов – несобственные интегралы первого и второго рода.

К несобственным интегралам первого рода относят интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Поясним суть этого понятия.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при всех $x \geq a$.

Тогда для любого числа $b \geq a$ существует определенный интеграл вида

$\int_a^b f(x) dx$. Ранее мы имели дело с определенными интегралами, в которых

пределы интегрирования были **конечными числами**. Теперь попытаемся расширить наши возможности в том плане, что пределы интегрирования могут быть бесконечными. Ранее, на младших курсах, изучалось такое

замечательное понятие как предел. Рассмотрим $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$. Этот предел может существовать, может быть бесконечным, может вообще не существовать. Так вот если $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ существует и равен конечному числу, то $\int_a^\infty f(x) dx$ называется сходящимся и равным этому пределу, а если $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ не существует или равен бесконечности, то $\int_a^\infty f(x) dx$ называется расходящимся. Если быть вполне строгим, то выражение вида $\int_a^\infty f(x) dx$ имеет смысл только в том случае, если интеграл является сходящимся. Однако мы будем пользоваться этим выражением во всех случаях, а уже потом будем выяснять, является ли данный интеграл сходящимся или нет.

Задача 49.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int_0^\infty x e^{-x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^b e^{-x^2} dx^2 = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задача 50.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_0^\infty x e^{-5x} dx$.

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{-5x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-5x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{5} \right) \int_0^b x d e^{-5x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{5} \right) \left[x e^{-5x} \Big|_0^b - \int_0^b e^{-5x} dx \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{5} \right) \left[b e^{-5b} - 0 + \frac{1}{5} e^{-5x} \Big|_0^b \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{25} \right) (e^{-5b} - 1) = \frac{1}{25}. \end{aligned}$$

Задача 51.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Решение. } \int_0^\infty \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^b \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\ln(1 + b^2) - \ln 1] = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

При исследовании несобственных интегралов первого рода очень часто основную роль играет вопрос, сходится ли данный интеграл или он расходится. В решении этого вопроса полезны следующие моменты.

Первое. Вопрос сходимости или расходимости несобственного интеграла первого рода определяется поведением подынтегральной функции на бесконечности. Это означает, что любой конечный отрезок влияет лишь на значение интеграла, но не влияет на вопрос его сходимости.

То есть при исследовании сходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ мы можем

исследовать сходимость интеграла $\int_c^{\infty} f(x)dx$ для любых $c > a$.

Второе. Для несобственных интегралов от неотрицательных функций важную роль играют признаки сравнения, которые мы сформулируем ниже.

Первый признак сравнения. Пусть имеются непрерывные при $x \geq a$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. При этом $f(x) \geq g(x) \geq 0$ при $x \geq a$.

Тогда, если $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ тоже сходится, при этом

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \geq \int_a^{\infty} g(x)dx.$$

Второй признак сравнения. Пусть имеются непрерывные при $x \geq a$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. При этом $f(x) \geq g(x) \geq 0$ при $x \geq a$.

Тогда, если $\int_a^{\infty} g(x)dx$ расходится, то и $\int_a^{\infty} f(x)dx$ тоже расходится.

Третий признак сравнения. Пусть имеются непрерывные при $x \geq a$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. При этом $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$ при $x \geq a$, и

существует **конечный** ненулевой предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, $K \neq 0$. Тогда либо

оба интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходятся, либо оба расходятся. (То есть не

может быть такой ситуации, когда один интеграл сходится, а другой расходится.)

Для несобственных интегралов от знакопеременных функций часто полезен признак абсолютной сходимости.

Признак абсолютной сходимости. Если сходится интеграл от модуля подынтегральной функции $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$, то сходится интеграл от самой этой функции $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

При использовании третьего признака сравнения часто возникают интегралы вида $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, где $a > 0$.

Необходимо помнить:

$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$;

$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится при $p \leq 1$.

Задача 52. Исследовать сходимость $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)\sqrt{4x + 1}}$.

Исследуем характер поведения функции на бесконечности.

Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{4x + 1}}$. При больших значениях x имеем

$$y = \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{4x + 1}} = \frac{x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{4 + \frac{1}{x}}}.$$

Тогда порядок поведения функции на бесконечности определяется выражением

$$y = \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{4x + 1}} \sim \frac{x}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Напомним, что мы можем пренебречь любым конечным отрезком.

Рассмотрим функции $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{4x + 1}}$ и $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Имеем, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, так как $\frac{3}{2} > 1$.

$$\text{Рассмотрим } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{4x + 1}} \right)}{\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{(x^2 + 1)\sqrt{4x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, оба интеграла сходятся.

Задача 53. Исследовать сходимость $\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{e^{2x} + 1}$.

Для исследования сходимости данного интеграла используем признак абсолютной сходимости, то есть в начале исследуем сходимость интеграла от модуля подынтегральной функции $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} \right| dx$. Поскольку $|\sin x| \leq 1$, то

$$\left| \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} \right| \leq \frac{1}{e^{2x} + 1} < e^{-2x}.$$

Рассмотрим $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$.

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$ является сходящимся, а

поскольку $\left| \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} \right| \leq e^{-2x}$, то, и силу первого признака сравнения, $\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} \right| dx$

также сходится. Используя признак абсолютной сходимости, делаем вывод,

что и $\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{e^{2x} + 1}$ является сходящимся.

В заключение сделаем еще два замечания, касающиеся несобственных интегралов первого рода.

1. Несобственный интеграл вида $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ определяется аналогичным

образом, а именно $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx$.

2. Несобственный интеграл, у которого оба предела интегрирования бесконечны ($\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$), определяется соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \text{ где } c - \text{любое число.}$$

При этом несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ является сходящимся, если сходятся оба несобственных интеграла $(\int_{-\infty}^c f(x)dx; \int_c^{\infty} f(x)dx)$ в правой части. Если хотя бы один из этих интегралов расходится, то $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ считается расходящимся.

Задача 54.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

(Мы выбрали $c = 1$, но могли взять и любое другое число, например ноль.) Исследуем отдельно каждый из интегралов в правой части.

$$\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_b^1 = \lim_{b \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg b) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$.

Задача 55.

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$.

Решение. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) \Big|_b^0 = \lim_{b \rightarrow -\infty} (-1 + e^{-b}) = \infty$$

Этот интеграл является расходящимся, и нет никакой необходимости исследовать второй интеграл. Можно сразу сделать вывод, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx$ является расходящимся.

Несобственные интегралы второго рода.

До настоящего момента, при вычислении определенного интеграла, мы считали, что подынтегральная функция является непрерывной на всем отрезке, и как следствие этого, ограниченной. Несобственные интегралы второго рода возникают в тех случаях, когда функция не является непрерывной на отрезке интегрирования.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на полуинтервале $(a; b]$, а в точке $x = a$ имеет особенность. (Например, $x = a$ является точкой разрыва, или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.)

В этом случае для любого c существует определенный интеграл

$$\int_c^b f(x) dx.$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ определим следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

При этом, если указанный предел существует, то несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$
 называется сходящимся, а его значение принимается равным

значению предела.

Если $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$ не существует, или равен бесконечности, то $\int_a^b f(x) dx$

называется расходящимся.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a; b)$, а в точке $x = b$ имеет особенность, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ определяется следующим соотношением:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$, а в точках

$x = a$; $x = b$ имеет особенности, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$

определяется следующим соотношением:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ где } c - \text{любое число из интервала } (a; b).$$

При этом исходный интеграл называется сходящимся, если сходится каждый из интегралов в правой части соотношения. Если хотя бы один из них расходится, то и исходный интеграл называется расходящимся.

Наконец, если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ имеет особенности в точках $c_1, c_2, \dots, c_n$, где $c_1 < c_2 < \dots < c_n$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

определяется следующим соотношением:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \dots + \int_{c_n}^b f(x)dx.$$

При этом, если хотя бы один из интегралов в правой части является расходящимся, то и весь интеграл считается расходящимся.

Ниже будут сформулированы свойства и признаки сходимости несобственного интеграла второго рода. При их формулировке мы будем предполагать, что функция $y = f(x)$ непрерывна на полуинтервале $(a; b]$ и имеет особенность в точке $x = a$. Отметим, что эти свойства во многом похожи на аналогичные для несобственных интегралов первого рода.

Первое. Вопрос сходимости или расходимости несобственного интеграла первого рода определяется поведением подынтегральной функции в окрестности точки $x = a$. Это означает, что при исследовании

сходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ мы можем исследовать сходимость интеграла $\int_a^c f(x)dx$ для любых $a < c < b$.

Второе. Для несобственных интегралов от неотрицательных функций важную роль играют признаки сравнения, которые мы сформулируем ниже.

Первый признак сравнения. Пусть имеются непрерывные при $a < x \leq b$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. При этом $f(x) \geq g(x) \geq 0$ при $a < x \leq b$.

Тогда, если $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то и $\int_a^b g(x)dx$ тоже сходится, при этом $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Второй признак сравнения. Пусть имеются непрерывные при $a < x \leq b$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. При этом $f(x) \geq g(x) \geq 0$ при $a < x \leq b$. Тогда, если $\int_a^b g(x)dx$ расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ тоже расходится.

Третий признак сравнения. Пусть имеются непрерывные при $a < x \leq b$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. При этом $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$ при

$a < x \leq b$, и существует конечный ненулевой предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad K \neq 0$.

Тогда либо оба интеграла $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, либо оба расходятся.

(То есть не может быть такой ситуации, когда один интеграл сходится, а другой расходится.)

Для несобственных интегралов от знакопеременных функций часто полезен признак абсолютной сходимости.

Признак абсолютной сходимости. Если сходится интеграл от модуля подынтегральной функции $\int_a^b |f(x)|dx$, то сходится интеграл от самой этой функции $\int_a^b f(x)dx$.

При использовании третьего признака сравнения часто возникают интегралы вида $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\beta}$, где $a > 0$.

Необходимо помнить:

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\beta}$ сходится при $\beta < 1$;

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\beta}$ расходится при $\beta \geq 1$.

Задача 57. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

Данная подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = -1$. Следовательно,

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{c \rightarrow -1} \int_c^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{c \rightarrow -1} \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} \Big|_c^0 = \frac{3}{2} \lim_{c \rightarrow -1} \left[1 - \sqrt[3]{(c+1)^2} \right] = \frac{3}{2}.$$

Задача 58. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$.

Данная подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 4$. Следовательно,

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{c \rightarrow 4} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{c \rightarrow 4} (-2\sqrt{4-x}) \Big|_0^c = \lim_{c \rightarrow 4} [-2\sqrt{4-c} + 2\sqrt{4}] = 4.$$

Задача 59. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Подынтегральная функция имеет особенности на обоих концах отрезка $x = -3$ и $x = 3$.

$$\text{Следовательно } \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} + \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Исследуем каждый из интегралов в правой части.

$$\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{c \rightarrow -3} \int_c^0 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{c \rightarrow -3} \arcsin \frac{x}{3} \Big|_c^0 = \lim_{c \rightarrow -3} \left(\arcsin 0 - \arcsin \frac{c}{3} \right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{c \rightarrow 3} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{c \rightarrow 3} \arcsin \frac{x}{3} \Big|_0^c = \lim_{c \rightarrow 3} \left(\arcsin \frac{c}{3} - \arcsin 0 \right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Тогда } \int_{-3}^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} + \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Задача 60. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$, лежащей внутри отрезка интегрирования.

$$\text{Следовательно, } \int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Исследуем каждый из интегралов в правой части.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{c \rightarrow 0} \int_{-1}^c \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{c \rightarrow 0} 3\sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^c = \lim_{c \rightarrow 0} (3\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{-1}) = 3$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{c \rightarrow 0} 3\sqrt[3]{x} \Big|_c^4 = \lim_{c \rightarrow 0} (3\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{c}) = 3\sqrt[3]{4}.$$

$$\text{Таким образом } \int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3 + 3\sqrt[3]{4}.$$

Задача 61. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$, лежащей внутри отрезка интегрирования.

Имеем

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Исследуем каждый из интегралов в правой части.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \int_{-1}^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^c = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{c} + 1 \right) = \infty$$

Значит, данный интеграл расходится, и нет необходимости исследовать второе слагаемое.

Следовательно, несобственный интеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$ является расходящимся.

Задача 62. Исследовать сходимость $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

Подынтегральная функция имеет особенность в точке $x = 0$. Воспользуемся третьим признаком сравнения. Из свойств эквивалентных бесконечно малых функций известно, что синус бесконечно малой функции эквивалентен этой функции, то есть $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$. Тогда $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$.

Несобственный интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x}$ является расходящимся, как интеграл вида

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{x^{\beta}} \text{ при } \beta = 1.$$

Рассмотрим

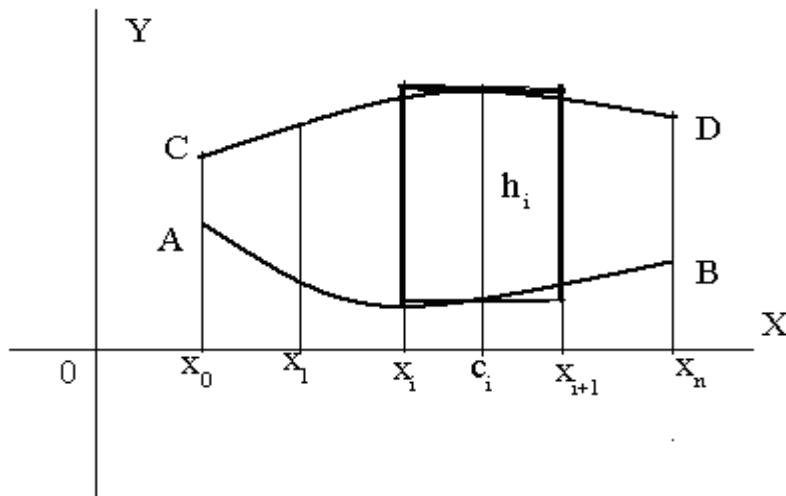
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{x^2} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, и несобственный интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$ является расходящимся.

4. Геометрические и механические приложения определенного интеграла

Цель данного раздела состоит не в том, чтобы привести несколько формул для решения конкретных задач, а в том, что бы научить студента использовать данный математический аппарат в решении конкретных задач. Поэтому мы будем иногда пренебрегать абсолютной строгостью математического изложения, обращая больше внимания на то, каким образом в решении конкретных задач возникает определенный интеграл.

Площадь криволинейной трапеции.



Фиг 2.

Криволинейной трапецией назовем область, ограниченную линиями (Фиг. 2): $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ - кривая AB, $y = f_2(x)$ - кривая CD. При этом предполагаем, что $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей (фиг.2) точками $x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ ($x_0 = a, x_n = b$). Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, где Δx_i - длина отрезка $[x_i; x_{i+1}]$.

Площадь части криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = x_i, x = x_{i+1}, y = f_1(x), y = f_2(x)$ обозначим ΔS_i . Тогда полная площадь всей криволинейной трапеции S равна $S = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i$.

Оценим значение величины ΔS_i . Для этого на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ выберем произвольную точку c_i . Вычислим значения функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в этой точке - $f_1(c_i), f_2(c_i)$. Обозначим $h_i = f_2(c_i) - f_1(c_i)$. Интуитивно понятно, что величина $h_i \Delta x_i$ при малом значении Δx_i будет не очень сильно отличаться от площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = x_i, x = x_{i+1}, y = f_1(x), y = f_2(x)$, то есть $\Delta S_i \approx h_i \Delta x_i \approx [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i$.

Тогда сумма таких площадей по всем отрезкам разбиения

$$\sum_{i=0}^{n-1} [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i$$

будет близка к площади S криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$$x = x_i, x = x_{i+1}, y = f_1(x), y = f_2(x), \text{ то есть } S \approx \sum_{i=0}^{n-1} [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i.$$

Понятно, что чем мельче будут отрезки разбиения, тем меньше будет погрешность. Теперь попытаемся перейти немного к более строгим

рассуждениям. Полученная сумма $\sum_{i=0}^{n-1} [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i$ является

интегральной суммой для функции $y = f_2(x) - f_1(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Следовательно, предел этой суммы при неограниченном уменьшении длин отрезков разбиения равен определенному интегралу от данной функции по

отрезку $[a; b]$. Таким образом $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$.

Замечание. Если добиваться полной строгости, то мы сначала должны решить вопрос, а что мы будем называть площадью криволинейной трапеции. Что такое площадь прямоугольника – это понятно, а вот что такое площадь произвольной фигуры, мы еще должны определить. При этом наше определение должно быть таким, что бы оно совпадало, по возможности, с нашим интуитивным понятием о площади. В некотором смысле площадью криволинейной трапеции мы и называем предел суммы $\sum_{i=0}^{n-1} [f_2(c_i) - f_1(c_i)] \Delta x_i$, и уже потом показываем, что этот предел равен определенному интегралу.

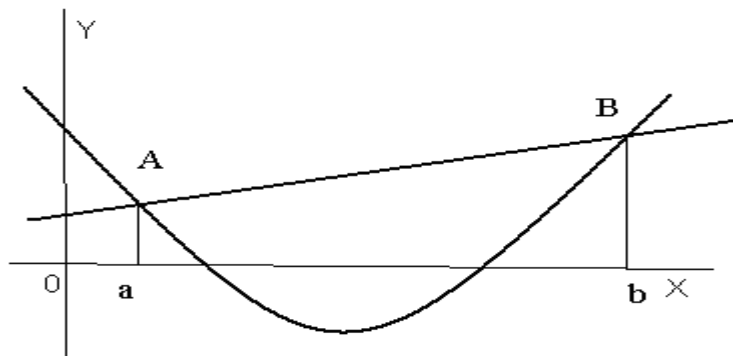
Задача 63. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 2$, $y = -1 - x$, $y = x^2$.

Очевидно, что при $0 \leq x \leq 2$ имеем $-1 - x \leq x^2$. В этом случае нет необходимости изображать область. Тогда

$$S = \int_0^2 [x^2 - (-1 - x)] dx = \int_0^2 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 + 2 = \frac{20}{3}.$$

Задача 64. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 6x + 8, \quad y = 3x + 8.$$



Фиг. 3.

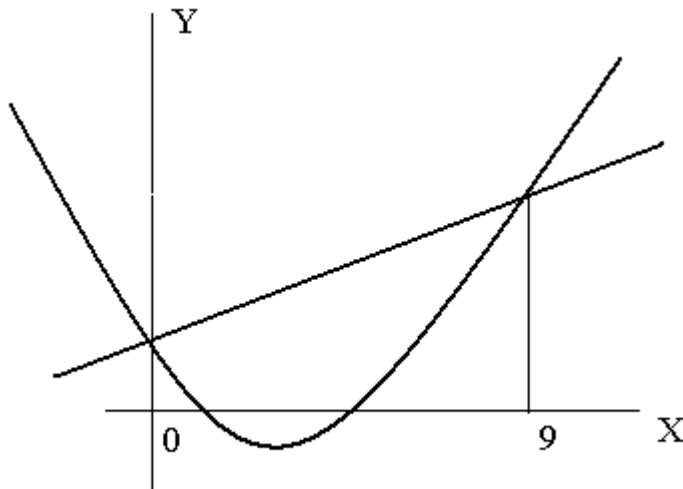
В этом примере значения $x = a$, $x = b$ не указаны. Попробуем нарисовать кривые. Сначала сделаем грубый рисунок (Фиг. 3). Первая кривая – это парабола, ветви которой направлены вверх, а вторая – это прямая с положительным угловым коэффициентом. Для того чтобы найти значения $x = a$, $x = b$, мы должны определить точки пересечения кривых. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 8, \\ y = 3x + 8 \end{cases}$$

Получаем $x^2 - 6x + 8 = 3x + 8$; $x^2 - 9x = 0$; $x(x - 9) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 9$.

То есть $a = 0$, $b = 9$.

Теперь более точно нарисует графики функций (Фиг. 4), хотя для решения задачи вычисления площади в этом уже необходимости нет.



Фиг. 4

Следовательно

$$S = \int_0^9 [3x + 8 - (x^2 - 6x + 8)] dx = \int_0^9 [9x - x^2] dx = \left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^9 = \frac{243}{2}$$

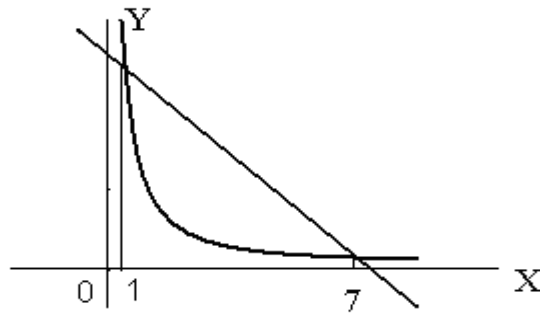
Задача 65. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $xy = 7$, $x + y = 8$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых. Для этого решаем систему уравнений.

$$\begin{cases} xy = 7, \\ x + y = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{x}, \\ x + y = 8. \end{cases} \Rightarrow x + \frac{7}{x} = 8 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2}.$$

Получаем: $x_1 = 1$, $y_1 = 7$; $x_2 = 7$, $y_2 = 1$.

Схематично фигура изображена на рисунке (Фиг. 5).



Фиг. 5.

Следовательно
$$S = \int_1^7 \left(8 - x - \frac{7}{x} \right) dx = \left(8x - \frac{x^2}{2} - 7 \ln x \right) \Big|_1^7 =$$

$$= \left(56 - \frac{49}{2} - 7 \ln 7 \right) - \left(8 - \frac{1}{2} - 7 \ln 1 \right) = 24 - 7 \ln 7.$$

Задача 66. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{(x+2)^2}, \quad x \geq 0; y = 0, x = 0.$$

В данном примере второй границей фигуры является бесконечность и ее площадь выражается несобственным интегралом первого рода

$$S = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

При решении этого примера мы исходили из того предположения, что к этому моменту Вы уже успели немного познакомиться с техникой вычисления несобственного интеграла, и поэтому не стали подробно расписывать переход к пределу, а проделали это «в уме».

Теперь рассмотрим пример вычисления площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ в случае, когда

кривая $y = f(x)$ задана не в явном виде, а параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где

$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. При этом предполагаем, что функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, а функция $\varphi(t)$ монотонна и имеет непрерывную производную на этом отрезке.

Тогда для вычисления площади имеем соотношение

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

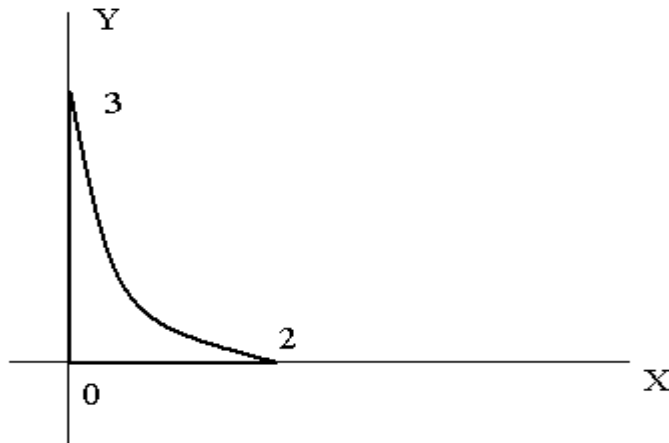
В полученном определенном интеграле сделаем замену переменных $x = \varphi(t)$. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$, $f(x) = f[\varphi(t)] = \psi(t)$. Пределы интегрирования заменяются соответственно: $x = a$ на $t = \alpha$; $x = b$ на $t = \beta$.

$$\text{Получаем } S = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Задача 67. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, x = 0; y = 0, \\ y = 3 \sin^3 t, x > 0, y > 0. \end{cases}$

Поскольку x и y неотрицательны, то параметр t изменяется на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Схематично фигура изображена на рисунке (Фиг. 6).



Фиг. 6.

Выражение для площади имеет вид

$$S = \int_0^2 y dx.$$

Делая замену переменных $x = 2 \cos^3 t$, получаем $dx = -6 \cos^2 t \sin t dt$,

$y = 3 \sin^3 t$. Из условия: $x = 0$ получаем $2 \cos^3 t = 0, t = \frac{\pi}{2}$; при $x = 2$ получаем

$$2 \cos^3 t = 2, t = 0.$$

$$\text{Тогда } S = \int_0^2 y dx = -18 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t \sin^4 t dt = 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t dt$$

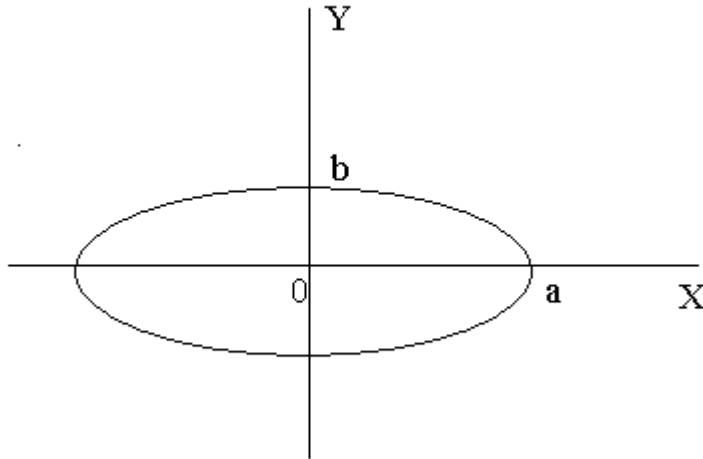
Воспользуемся формулами косинуса двойного угла

$$S = 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t dt = 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t) dt = \frac{9}{4} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{9}{8} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{9}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) + \\
&+ \frac{9}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2t) \cos 2t dt = \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{8} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{9}{32} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{9}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2t) d(\sin 2t) = \\
&= \frac{9\pi}{8} - \frac{9\pi}{16} + \frac{9}{8} \left(\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Задача 68. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Эллипс с полуосями a , b (Фиг. 7) - фигура, симметричная относительно всех координатных осей, поэтому достаточно найти площадь в первой координатной четверти.



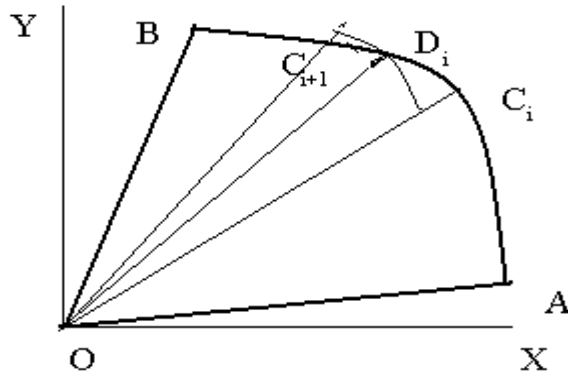
Фиг. 7

В первой четверти зададим эллипс параметрически $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$

Тогда значению $x = 0$ соответствует $t = \frac{\pi}{2}$, значению $x = a$ соответствует $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Следовательно } S &= 4 \int_0^a y dx = -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot a \sin t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \\
&= 2ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.
\end{aligned}$$

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейного сектора.



Фиг. 8

Криволинейным сектором (фиг. 8) называется область, ограниченная линиями, уравнения которых в полярной системе координат (r, φ) имеют вид:

- 1) два луча $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$);
- 2) линия $r = f(\varphi)$.

На фигуре 8 (предполагается, что ось X совпадает с полярной осью) лучу $\varphi = \alpha$ соответствует OA (угол AOX равен α), лучу $\varphi = \beta$ соответствует OB (угол BOX равен β), линии $r = f(\varphi)$ соответствует кривая AB.

Разделим область на части лучами φ_0 ($\varphi_0 = \alpha$), $\varphi_1, \dots, \varphi_i$ (луч OC_i), φ_{i+1} (луч OC_{i+1}), $\dots, \varphi_n$ ($\varphi_n = \beta$). Обозначим $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Площадь криволинейного сектора $C_{i+1}OC_i$ обозначим ΔS_i .

Тогда полная площадь S криволинейного сектора BOA может быть представлена в виде $S = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i$.

Оценим значение ΔS_i , предполагая, что $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ - достаточно малая величина. Выберем значение угла $\varphi = \gamma_i$, где $\varphi_i \leq \gamma_i \leq \varphi_{i+1}$ (луч OD_i). Заменим криволинейный сектор $C_{i+1}OC_i$ круговым сектором радиуса OD_i , где $OD_i = f(\gamma_i)$. При малом значении $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ есть все основания полагать, что их площади отличаются незначительно. Соответствующая площадь кругового сектора радиуса OD_i равна $\frac{1}{2} f^2(\gamma_i) \Delta\varphi_i$. Тогда имеем

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} f^2(\gamma_i) \Delta\varphi_i.$$

Полученная сумма является интегральной суммой для функции $y = \frac{1}{2} f^2(\varphi)$ на отрезке $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Переходя к пределу, при стремлении максимального значения $\Delta\varphi_i$ к нулю, получаем

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f^2(\varphi) d\varphi.$$

Замечание.

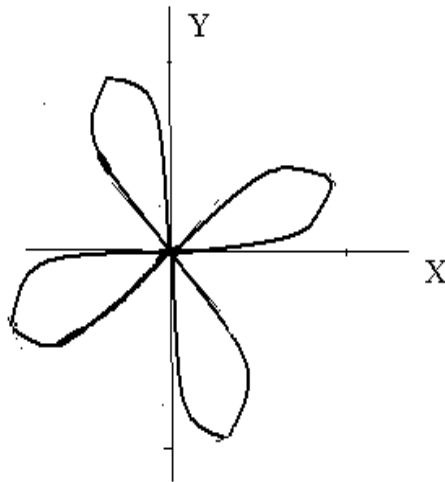
Пусть область ограничена линиями, уравнения которых в полярной системе координат (r, φ) имеют вид:

- 1) два луча $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$);
- 2) линии $r = f_2(\varphi), r = f_1(\varphi)$, где $f_1(\varphi) \leq f_2(\varphi)$ при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.

Тогда ее площадь вычисляется по формуле $S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f_2^2(\varphi) - f_1^2(\varphi)] d\varphi$

Задача 69. Найти площадь фигуры, ограниченной линией:
 $r = \sin 4\varphi$.

Данная фигура схематично изображена на рисунке (Фиг. 9).



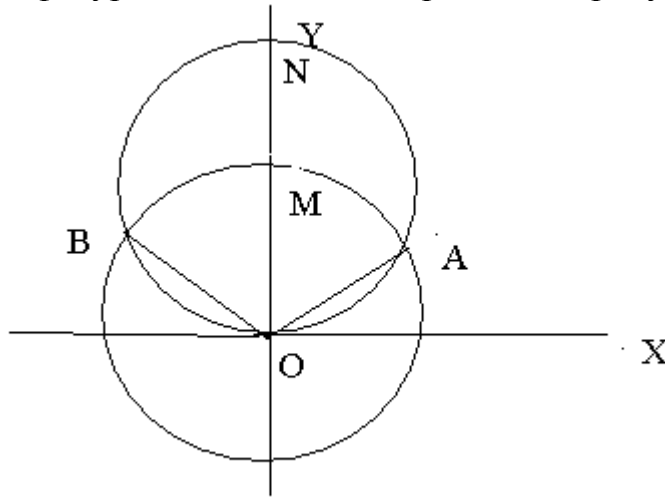
Фиг. 9.

Данный «цветок» состоит из четырех совершенно одинаковых «лепестков». (Напомним, что по смыслу полярной системы координат значение $r \geq 0$, поэтому для тех значений угла φ , при которых $\sin 4\varphi < 0$, точек на линии не существует). Поэтому достаточно найти площадь одного лепестка и умножить ее на четыре. «Первый лепесток» ограничен лучами $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$ и кривой $r = \sin 4\varphi$. Следовательно

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sin^2 4\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 8\varphi) d\varphi = \left(\varphi - \frac{\sin 8\varphi}{8} \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 70. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:
 $r = 2 \sin \varphi, \quad r = 1 \quad (r \geq 1).$

Данная фигура схематично изображена на рисунке (Фиг. 10).



Фиг. 10.

Она ограничена кривыми BNA и BMA. Найдем точки пересечения кривых $r = 2 \sin \varphi, \quad r = 1$. Получаем $2 \sin \varphi = 1$. На отрезке $[0; 2\pi]$ уравнение имеет два корня $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$. Следовательно, в полярной системе координат луч OA имеет уравнение $\varphi = \frac{\pi}{6}$, луч OB - $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, кривая BNA - $r = 2 \sin \varphi$, кривая BMA - $r = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2} [4 \sin^2 \varphi - 1] d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2} [1 - 2 \cos 2\varphi] d\varphi = \frac{1}{2} [\varphi - \sin 2\varphi] \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{3} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений.

Пусть имеется некоторое тело в пространстве. Обозначим $Q(z)$ - площади его сечений плоскостями, перпендикулярными оси Z. Требуется определить объем тела.

Будем предполагать, что плоскости пересекают данное тело при значениях z , лежащих на отрезке $[a; b]$. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей

точками z_0 ($z_0=a$), $z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n$ ($z_n=b$). Обозначим: $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$, ΔV_i - объем слоя толщины Δz_i , заключенного между сечениями $z=z_i$ и $z=z_{i+1}$. Если Δz_i достаточно мало, то приближенно этот объем можно оценить как объем цилиндра высоты Δz_i и площади основания $Q(c_i)$, где $z_i \leq c_i \leq z_{i+1}$, то есть $\Delta V_i \approx Q(c_i)\Delta z_i$.

Тогда полный объем V приближенно равен

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i = \sum_{i=0}^{n-1} Q(c_i) \Delta z_i.$$

Полученная сумма является интегральной суммой для функции $Q(z)$ на отрезке $[a; b]$. Окончательная формула для объема имеет вид

$$V = \int_a^b Q(z) dz$$

Замечание. В частности, если тело получено вращением относительно оси X криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $x=a$, $x=b$, $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, где $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$, то площадь сечения равна $Q(x) = \pi[f_2^2(x) - f_1^2(x)]$ и объем соответственно равен

$$V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx.$$

Задача 71. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Рассмотрим сечения данного эллипсоида плоскостями, перпендикулярными оси Z . Преобразуем уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Следовательно, сечением эллипсоида является эллипс с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$,

$b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}$. Как было показано ранее, площадь эллипса с полуосями a, b равна πab . Следовательно площадь сечения эллипсоида $Q(z)$ выражается формулой $Q(z) = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$, где $-c \leq z \leq c$.

$$\text{Тогда } V = \int_{-c}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left(z - \frac{z^3}{3c^2}\right) \Big|_{-c}^c = \frac{4}{3} \pi abc.$$

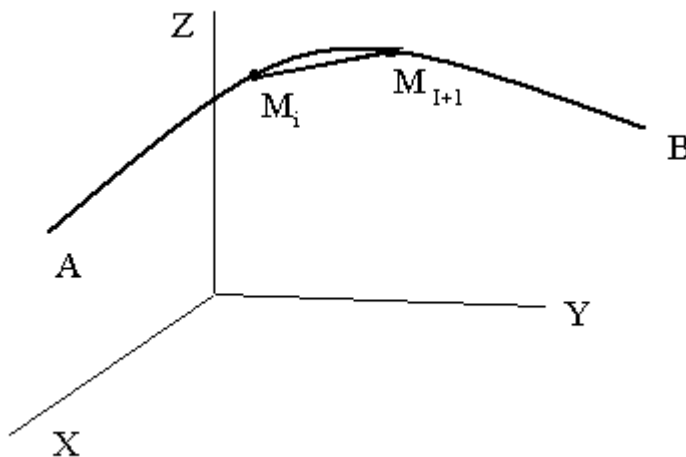
Задача 72. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной линиями.

$$y = \frac{1}{\cos x}; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{4}.$$

Решение. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \pi \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi.$

Вычисление длин кривых.

Предположим, что в пространстве (X, Y, Z) параметрически задана кривая $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$. Требуется определить длину дуги данной кривой, если значения параметра t при этом изменяются на отрезке $[a; b]$ (дуга AB на фиг. 11).



Фиг. 11.

Относительно функций $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ будем предполагать, что они являются непрерывными и имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками t_0 ($t_0 = a$), $t_1, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_n$ ($t_n = b$). Обозначим: $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, Δs_i - длина дуги $M_i M_{i+1}$, где координаты точек соответственно равны $M_i(\varphi(t_i); \psi(t_i); \chi(t_i))$,

$M_{i+1}(\varphi(t_{i+1}); \psi(t_{i+1}); \chi(t_{i+1}))$. Если Δt_i достаточно мало, то приближенно Δs_i - длину дуги $M_i M_{i+1}$ можно заменить величиной Δl_i - длиной секущей $M_i M_{i+1}$.

Рассмотрим вектор $\vec{M_i M_{i+1}} = \{\Delta x_i; \Delta y_i; \Delta z_i\}$, где

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i), \Delta y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i), \Delta z_i = \chi(t_{i+1}) - \chi(t_i).$$

Значение Δl_i равно модулю вектора $\vec{M_i M_{i+1}}$, то есть

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}.$$

Согласно теореме Лагранжа

$$\Delta x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_{1i})\Delta t_i, \quad \Delta y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i) = \psi'(\tau_{2i})\Delta t_i,$$

$$\Delta z_i = \chi(t_{i+1}) - \chi(t_i) = \chi'(\tau_{3i})\Delta t_i, \text{ где точки } \tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i} \text{ лежат на отрезке } [t_i, t_{i+1}].$$

Тогда L - длина дуги АВ приближенно равна

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta l_i \approx \sqrt{[\varphi'(\tau_{1i})]^2 + [\psi'(\tau_{2i})]^2 + [\chi'(\tau_{3i})]^2} \Delta t_i.$$

Полученная сумма не является интегральной суммой, поскольку точки $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i}$ не обязаны совпадать. Однако, поскольку $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \tau_{3i}$ лежат на отрезке длиной Δt_i , то можно показать, что ее предел при стремлении к нулю максимального значения Δt_i равен пределу интегральной суммы для функции $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}$ на отрезке $[a; b]$.

$$\text{Следовательно } L = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

С точки зрения математики вопрос о длине кривой, это не совсем простой вопрос. Фактически мы определяем длину кривой, как предел длин секущих и показываем, что этот предел равен полученному определенному интегралу.

Замечание 1. Если кривая задана параметрически на плоскости

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ где } a \leq t \leq b, \text{ то ее длина вычисляется по аналогичной формуле}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Замечание 2. Если кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$, то можно считать, что роль параметра t играет независимая переменная x . Тогда длина кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Задача 73. Найти длину кривой, заданной уравнением:

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx = \\ &= \int_0^1 \sqrt{\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right]^2} dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \left. \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right|_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e}. \end{aligned}$$

Задача 74. Найти длину кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2 \sin^3 t, \\ y = 2 \cos^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Решение. $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[6 \sin^2 t \cos t]^2 + [-6 \cos^2 t \sin t]^2} dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \sin t \cos t dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2} \cos \pi + \frac{3}{2} \cos 0 = 3.$$

Задача 75. Найти длину кривой, заданной уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 3t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt}\right]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{[-2 \sin t]^2 + [2 \cos t]^2 + [3]^2} dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{13} dt = \sqrt{13} t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{13}.$$

Замечание. Если кривая задана уравнением в полярной системе координат $r = f(\varphi)$, где $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то, поскольку $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, ее

можно рассматривать как заданную параметрически $\begin{cases} x = f(\varphi) \cos \varphi \\ y = f(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$,

где роль параметра играет угол φ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$). Тогда длина кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left[\frac{dx}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\varphi}\right]^2} d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\varphi)]^2 + [f'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Задача 76. Найти длину кривой, заданной уравнением $r = 4 \sin \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq \pi$.

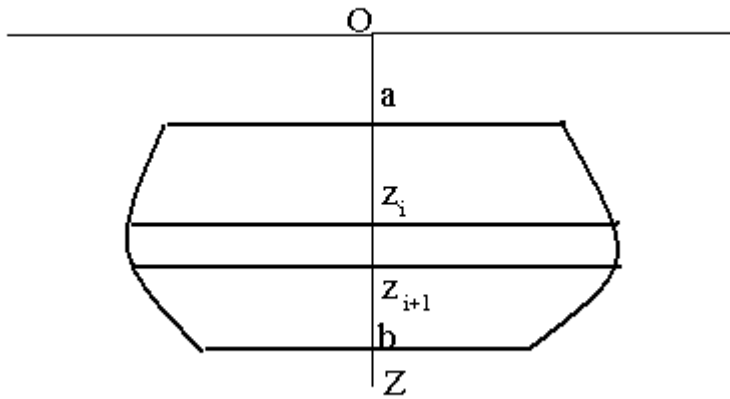
Решение.

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{\left[\frac{dx}{d\varphi}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\varphi}\right]^2} d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{[4 \cos \varphi]^2 + [4 \sin \varphi]^2} d\varphi = \int_0^{\pi} 4 d\varphi = 4\pi$$

5. Механические приложения определенного интеграла

Вычисление силы давления жидкости на вертикально погруженную в нее пластину

Пусть имеется пластина, вертикально погруженная в жидкость (Фиг. 12). Будем предполагать, что ось Z перпендикулярна свободной поверхности жидкости, а ее начало совпадает со свободной поверхностью. Верхний край пластины находится на глубине $z = a$, нижний на глубине $z = b$. Пусть ширина пластины l в направлении, перпендикулярном оси Z , - переменная, являющаяся известной функцией $l = l(z)$. Плотность жидкости обозначим ρ . Требуется определить силу давления жидкости на пластину. (Напомним из курса физики, что давление p на глубине z равно $p = \rho g z$, где $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ - ускорение свободного падения.)



Фиг. 12

Разделим пластину на n частей прямыми, параллельными свободной поверхности: $z = z_0$ ($z_0 = a$), $z = z_1, \dots, z = z_i, z = z_{i+1}, \dots, z = z_n$ ($z_n = b$). Обозначим $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$.

Оценим ΔF_i - значение силы, действующей на часть пластины, лежащую между прямыми $z = z_i$ и $z = z_{i+1}$.

Если $\Delta z_i = z_{i+1} - z_i$ достаточно мало, то давление p_i на таком узком слое можно приближенно считать постоянным и принять равным $p_i \approx \rho g z_i$. Сам слой можно приближенно считать прямоугольным, а его площадь ΔS_i принять равной $\Delta S_i \approx l(z_i) \Delta z_i$. Тогда значение силы ΔF_i можно выразить соотношением $\Delta F_i \approx p_i \Delta S_i \approx \rho g z_i l(z_i) \Delta z_i$.

Следовательно, суммарная сила F , действующая на пластину приближенно равна $F \approx \sum_{i=0}^{n-1} \rho g z_i l(z_i) \Delta z_i$. Полученная сумма является интегральной суммой для функции $\rho g z l(z)$ на отрезке $a \leq z \leq b$.

Окончательно получаем $F = \int_a^b \rho g z l(z) dz$.

Задача 78. Найти силу давления жидкости плотности ρ на вертикально погруженную в нее пластину, имеющую форму трапеции с верхним основанием a , нижним основанием b , высотой h , если верхнее основание находится на поверхности воды.

Поскольку пластина имеет форму трапеции, то ее ширина $l(z)$ является линейной функцией z вида $l(z) = kz + c$. Так как $l(0) = a$, $l(h) = b$, то

$$l(z) = \frac{b-a}{h}z + a.$$

Следовательно

$$F = \int_0^h \rho g z \left[\frac{b-a}{h}z + a \right] dz = \rho g \left[\frac{b-a}{3h}z^3 + a \frac{z^2}{2} \right]_0^h = \rho g \frac{(2b+a)h^2}{6}.$$

Вычисление работы переменной силы

Пусть переменная сила $F(x)$ перемещает точку по прямой из положения $x=a$ в положение $x=b$. Требуется определить работу, совершенную данной силой. Разобьем весь путь из положения $x=a$ в положение $x=b$ на n частей точками x_0 ($x_0 = a$), $x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ ($x_n = b$). Обозначим

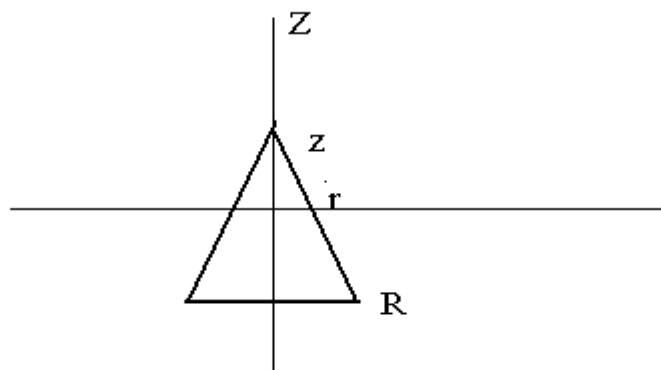
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Работу по перемещению из положения x_i в x_{i+1} обозначим ΔA_i . Если $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ достаточно малая величина, то силу при перемещении из положения x_i в x_{i+1} можно приближенно считать постоянной и равной $F(x_i)$. Тогда значение $\Delta A_i \approx F(x_i)\Delta x_i$. Тогда полная работа A приближенно равна - $A \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)\Delta x_i$.

Полученная сумма является интегральной суммой для функции $F(x)$ на отрезке $[a; b]$. Следовательно, выражение для работы может быть записано в виде $A = \int_a^b F(x) dx$.

Задача 79. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вытащить из жидкости плотности ρ конус радиуса R , высоты H , плотности ρ_1 , если в начальный момент вершина конуса находится на поверхности, а плоскость основания параллельна поверхности жидкости.

Решение. Ось Z направим перпендикулярно поверхности жидкости, а ее начало поместим на ее поверхности (Фиг. 13).



Фиг. 13

При вытаскивании конуса, вершиной будет пройден путь от $z=0$ до $z=H$.

Найдем зависимость силы $F(z)$. Пусть конус поднят над поверхностью жидкости на высоту z . Найдем зависимость силы $F(z)$. На конус действуют:

1) сила тяжести, равная $\frac{\rho_1 g \pi R^2 H}{3}$ и направленная вниз; 2) выталкивающая сила жидкости, равная весу жидкости, вытесненной погруженной частью конуса $\frac{\rho g \pi R^2 H}{3} - \frac{\rho g \pi R^2 z^3}{3H^2}$, направленная вверх.

При вытаскивании конуса сила $F(z)$ должна уравнивать сумму этих сил. Следовательно $F(z) = \frac{(\rho_1 - \rho) g \pi R^2 H}{3} + \frac{\rho g \pi R^2 z^3}{3H^2}$.

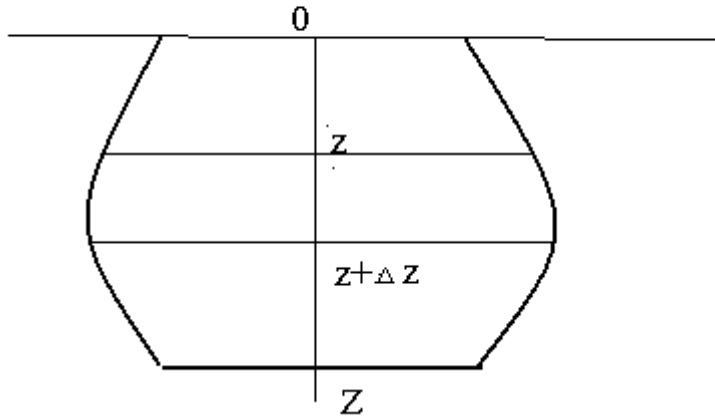
$$\begin{aligned} \text{Получаем } A &= \int_0^H F(z) dz = \int_0^H \left[\frac{(\rho_1 - \rho) g \pi R^2 H}{3} + \frac{\rho g \pi R^2 z^3}{3H^2} \right] dz = \\ &= \left[\frac{(\rho_1 - \rho) g \pi R^2 H z}{3} + \frac{\rho g \pi R^2 z^4}{12H^2} \right]_0^H = \frac{(\rho_1 - \rho) g \pi R^2 H^2}{3} + \frac{\rho g \pi R^2 H^2}{12}. \end{aligned}$$

Определение работы, затрачиваемой на выкачивание жидкости из сосуда

К этому моменту мы предполагаем, что вы немного освоились с методом составления интегральных сумм, поэтому рассуждения станут менее подробными.

Пусть имеется сосуд глубины H , заполненный жидкостью с плотностью ρ (Фиг. 14). Будем считать, что ось Z направлена перпендикулярно поверхности жидкости, а начало оси находится на ее

поверхности. Предполагаем, что площадь сечения сосуда плоскостью, перпендикулярной оси Z , является известной функцией $S(z)$. Требуется определить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из сосуда.

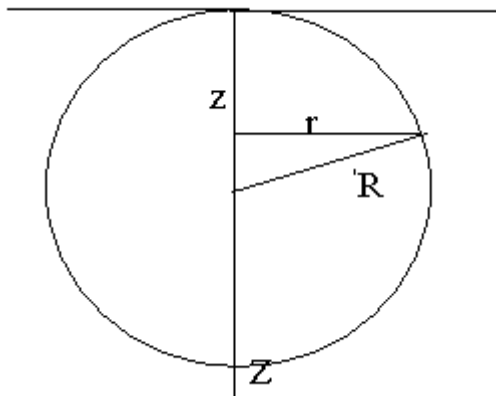


Фиг. 14.

В начале, определим работу ΔA , которую необходимо затратить на выкачивания слоя толщины Δz , лежащего на глубине от z до $z + \Delta z$. Толщину слоя Δz считаем малой величиной. При выкачивании этот слой поднимется на высоту, приблизительно равную z . Следовательно, работа ΔA оценивается величиной $\Delta A \approx \Delta P z$, где ΔP - вес этого слоя. В свою очередь $\Delta P = \rho g \Delta V$, где ΔV - объем слоя. Объем указанного слоя приблизительно равен $\Delta V \approx S(z) \Delta z$. Тогда $\Delta A \approx \Delta P z \approx \rho g z S(z) \Delta z$. Суммируя по всем слоям и переходя к пределу, получаем

$$A = \int_0^h \rho g z S(z) dz.$$

Задача 80. Определить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности ρ из сосуда, имеющего форму сферы (Фиг. 15) радиуса R .



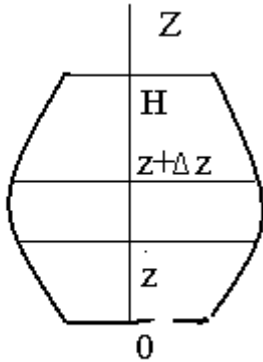
Фиг. 15.

Площадь сечения $S(z)$ равна $S(z) = \pi r^2$. По теореме Пифагора $r^2 = R^2 - (R - z)^2 = 2Rz - z^2$. Следовательно $A = \int_0^{2R} \rho g z \pi (2Rz - z^2) dz =$

$$= \rho g \pi \left(\frac{2}{3} R z^3 - \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^{2R} = \rho g \frac{4}{3} \pi R^4$$

Определение времени вытекания жидкости из сосуда

Постановка задачи. Имеется сосуд (Фиг. 16) глубины H , в дне которого имеется отверстие площади F . Требуется определить время вытекания жидкости из данного сосуда.



Фиг. 16.

Ось Z направим перпендикулярно свободной поверхности жидкости, а ее начало совместим с уровнем отверстия. Предположим, что площадь сечения сосуда плоскостью, перпендикулярной оси Z , является известной функцией $S(z)$. Напомним, что скорость v вытекания жидкости из отверстия вычисляется по формуле $v = \sqrt{2gh}$, где h – уровень свободной поверхности жидкости над отверстием.

Оценим время Δt , за которое жидкость опустится с уровня $z + \Delta z$ до уровня z . Объем жидкости в таком слое ΔV оценивается соотношением $\Delta V = S(z)\Delta z$. Скорость вытекания жидкости v в этот момент оценивается величиной $v = \sqrt{2gz}$. Объем ΔV_1 жидкости, вытекшей за время Δt примерно равен $\Delta V_1 \approx Fv\Delta t \approx F\sqrt{2gz}\Delta t$. Из условия равенства ΔV и ΔV_1 получаем оценку времени Δt , за которое жидкость опустится с уровня $z + \Delta z$

до уровня z :
$$\Delta t = \frac{S(z)\Delta z}{F\sqrt{2gz}}.$$

Тогда полное время t вытекания жидкости из сосуда равно

$$t = \int_0^H \frac{S(z)dz}{F\sqrt{2gz}}.$$

Задача 81. Найти время вытекания жидкости из цилиндрического сосуда радиуса R , высоты H , в дне которого имеется отверстие площади F .

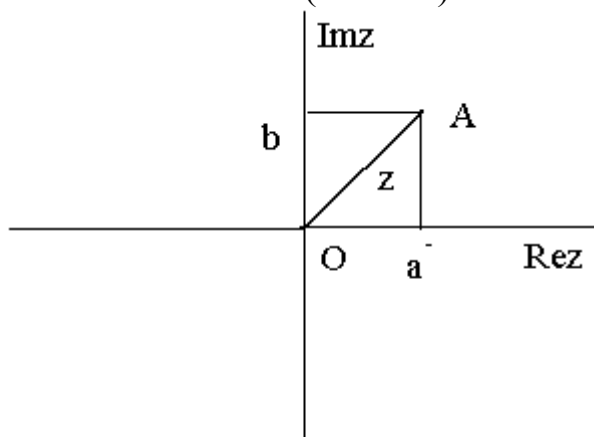
Площадь сечения цилиндрического сосуда $S(z)$ - постоянная величина равная - $S(z) = \pi R^2$. Тогда

$$t = \int_0^H \frac{\pi R^2 dz}{F \sqrt{2gz}} = \frac{\pi R^2}{F \sqrt{2g}} 2\sqrt{z} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2}{F} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

6. Комплексные числа

В алгебраической форме комплексное число z представляется в виде $z = a + bi$, где a - действительная часть, b - мнимая часть, число i - мнимая единица, обладающая свойством $i^2 = -1$.

Комплексное число удобно представлять вектором $\vec{OA}$ на комплексной плоскости (Фиг. 17).



Фиг. 17.

Два комплексных числа $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ считаются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. То есть $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c, b = d$.

Операции сложения (вычитания) для комплексных чисел определены следующим образом: $z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$, то есть отдельно складываются (вычитаются) действительные и мнимые части. Комплексным нулем называется число вида $0 = 0 + 0i$. Нетрудно видеть, что для любого z выполнено $z + 0 = z$.

Операция умножения $z_1 \cdot z_2$ проводится по следующей схеме

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + b \cdot ci + b \cdot d \cdot i \cdot i$$

Так как $i^2 = -1$, то

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + a \cdot di + b \cdot ci - b \cdot d = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Комплексной единицей называется число $1 = 1 + 0i$. Легко проверить, что для любого числа z выполнено $1 \cdot z = z$.

Если комплексное число z равно $z = a + bi$, то комплексно сопряженным называется число, обозначаемое $\bar{z}$, где $\bar{z} = a - bi$. Заметим, что $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

Деление комплексных чисел осуществляется по следующей схеме (числитель и знаменатель умножают на сопряженное к знаменателю):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Задача 82. Вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 2i$.

Решение. $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 2i) = (2 + 3) + (-3 + 2)i = 5 - i$.

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i) \cdot (3 + 2i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2i - 3 \cdot 3i - 3 \cdot 2 \cdot i \cdot i = 6 + 4i - 9i + 6 = 12 - 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 3i)}{(3 + 2i)} = \frac{(2 - 3i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{6 - 4i - 9i - 6}{9 + 4} = \frac{0 - 13i}{13} = -i.$$

Задача 83. Вычислить $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 5 - 2i$

$$z_1 + z_2 = (1 + 5i) + (5 - 2i) = (1 + 5) + (5 - 2)i = 6 + 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 5i) \cdot (5 - 2i) = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 2i + 5 \cdot 5i - 5 \cdot 2 \cdot i \cdot i = 5 - 2i + 25i + 10 = 15 + 23i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 5i)}{(5 - 2i)} = \frac{(1 + 5i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{5 + 2i + 25i - 10}{25 + 4} = \frac{-5 + 27i}{29} = -\frac{5}{29} + \frac{27}{29}i$$

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Обозначим r - модуль вектора $\vec{OA}$ (Фиг. 16) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Это число назовем модулем $|z|$ - комплексного числа $z = a + bi$. Заметим, что $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Угол наклона вектора $\vec{OA}$ к действительной оси $\text{Re} z$ обозначим φ и назовем аргументом комплексного числа z . Тогда $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. Следовательно, $z = a + bi = r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Представление комплексного числа в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа. Заметим, что аргумент комплексного числа определен с точностью до слагаемого, кратного 2π . Если не будет специальных оговорок, мы будем предполагать, что речь идет о главном значении аргумента φ , где $0 \leq \varphi < 2\pi$. В общем случае два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ равны, когда равны их модули, а аргументы отличаются на слагаемое, кратное 2π .

Для комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, операции умножения и деления выполняются достаточно просто.

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Тогда:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

(при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются);

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

(при делении комплексных чисел модули делятся, а аргументы вычитаются).

Из формулы умножения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме следует, что если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то z^n , где n – целое число равно

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Эта формула, называется формулой Муавра.

Если комплексное число задано в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, а нам требуется представить его в алгебраической форме $z = a + bi$, то действительная и мнимая части комплексного числа определяются соотношениями $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

Если комплексное число представлено в алгебраической форме $z = a + bi$, а нам требуется представить его в тригонометрической форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то модуль и аргумент определяются соотношениями

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Известные значения синуса и}$$

косинуса однозначно определяют главное значение аргумента.

Согласно формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Следовательно, комплексное число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ может быть записано в виде $z = re^{i\varphi}$.

Такое представление называется показательной формой комплексного числа.

Задача 84. Записать в тригонометрической и показательной форме $z = 2 - i$.

Имеем $z = 2 - i$. Следовательно $a = 2$, $b = -1$. Тогда:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{2}$. Так как действительная часть положительна, а мнимая отрицательна, то комплексное число находится в четвертой четверти комплексной плоскости и, следовательно, $\varphi = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

Тогда имеем:

в тригонометрической форме

$$z = 2 - i = \sqrt{5} \left[\cos \left(2\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) + i \sin \left(2\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right) \right];$$

в показательной форме

$$z = 2 - i = \sqrt{5} e^{i \left(2\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)}.$$

Задача 85. Вычислить: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{2006}$.

Решение. Представим число $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ в тригонометрической форме.

$$\text{Имеем } a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2}, r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}. \text{ Тогда } \varphi = \frac{\pi}{6}. \text{ Следовательно, согласно формуле}$$

Муавра

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{2006} &= \left[1 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^{2006} = 1^{2006} \left[\cos \left(2006 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(2006 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ &= \left[\cos \left(334\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(334\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right] = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Вычисление корня n -ой степени из комплексного числа

По определению $\sqrt[n]{z}$ называется число z_1 , такое, что $z_1^n = z$ (n – целое положительное число).

Пусть в тригонометрической форме число z имеет вид $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Будем искать z_1 в виде $z_1 = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$.

Поскольку $z_1^n = z$, то, согласно формуле Муавра

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\psi + i \sin n\psi).$$

Из условия равенства комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, следует:

$$1) \text{ равенство модулей } r = \rho^n, \text{ то есть } \rho = \sqrt[n]{r};$$

2) аргументы могут отличаться на слагаемое, кратное 2π , то есть $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k – целое число.

Отметим, что в полученном выражении для аргумента ψ смысл имеют значения $0 \leq k \leq n-1$. При дальнейшем увеличении k значения аргумента ψ будут отличаться от полученных ранее на величину, кратную 2π .

Следовательно, $\sqrt[n]{z}$ принимает n значений вида

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \psi_k + i \sin \psi_k), \text{ где } \psi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Задача 86. Вычислить $\sqrt[3]{-8i}$.

Представим число $z = -8i$ в тригонометрической форме. Имеем

$$a = 0, b = -8, r = \sqrt{a^2 + b^2} = 8, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -1.$$

$$\text{Тогда } \varphi = \frac{3\pi}{2}. \text{ Следовательно } -8i = 8 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Будем искать $\sqrt[3]{z}$ в виде $\sqrt[3]{z} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$.

$$\text{Следовательно } \rho^3 (\cos 3\psi + i \sin 3\psi) = 8 \left[\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right].$$

$$\text{Получаем } \rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} = 2,$$

$$3\psi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad 0 \leq k \leq 2.$$

Имеем три значения аргумента

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi \cdot 0}{3} = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi \cdot 1}{3} = \frac{7\pi}{6}, \quad \psi_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi \cdot 2}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Следовательно, имеются три значения $\sqrt[3]{-8i}$:

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = 2i;$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \left[\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right] = -\sqrt{3} - i;$$

$$\sqrt[3]{-8i} = 2 \left[\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right] = \sqrt{3} - i.$$

Литература

1. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Высшая математика т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. Дрофа. М. 2003. 510 с.
2. В.А. Ильин, А.В. Куркина. Высшая математика. Издательство МГУ. М. 2004. 594 с.
3. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. М. Наука. 2003.
4. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу. М. Астрель. 2001. 496 с.
5. И.П. Натансон. Краткий курс высшей математики. Изд. «Лань» М. 2005. 736 с.

Содержание.

Введение.	3
1. Неопределенный интеграл	3
2. Определенный интеграл	39
3. Несобственный интеграл	45
4. Геометрические приложения определенного интеграла	56
5. Механические приложения определенного интеграла	69
6. Комплексные числа	74
Литература.	79