ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**Московский государственный университет
приборостроения и информатики**

кафедра высшей математики

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Методические указания для студентов дневной формы обучения

Москва 2007

Составители: д.т.н. Головешкин В.А., к.т.н. Егиазаров Ю.И., к.т.н. Зюзько Т.Н
.
УДК 517.
Линейная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания для студентов дневной формы обучения.
/МГУПИ. Сост. д.т.н. Головешкин В.А., к.т.н. Егиазаров Ю.И., к.т.н. Зюзько Т.Н
.
М. 2007./

Излагаются основные понятия курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Приведены примеры решения задач домашних контрольных работ. Предназначено для студентов, обучающихся по дневной форме обучения. Библиогр: 4 .

Рецензент: доц. Якобовская И.М.

Введение.

Цель данного пособия помочь студенту самостоятельно приобрести навыки решения задач, подготовиться к выполнению контрольных работ, сдаче зачета и экзамена. . При написании пособия авторы не ставили своей целью дать систематическое изложение теоретического материала. Перед каждой рассматриваемой задачей дается тот теоретический материал, который необходим для ее решения. Если студент ранее овладел необходимым теоретическим материалом, то вводную часть каждой задачи он может опустить и перейти непосредственно к решению задачи. Необходимо отметить, что приведенный теоретический материал достаточно полно охватывает курс указанного предмета. Авторы надеются, что пособие будет полезно студентам в овладении методами решения основных задач курса линейной алгебры и аналитической геометрии.

Задача 1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Прежде чем приступить к решению задачи, напомним некоторые сведения из теории определителей.

Матрицей А размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, которую будем представлять в виде.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Символом a_{ij} обозначается элемент, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j. Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной. Понятие определителя имеет смысл только для квадратной матрицы. Определитель - это некоторое число, которое ставится в соответствие квадратной матице. Оно обозначается символом Δ или $|A|$. Ниже будет изложено правило его вычисления.

Для матрицы А размерности 1×1 А=(a_{11}) по определению $|A| = a_{11}$.

Минором M_{ij} матрицы А называется определитель матрицы, получаемой из матрицы А путем удаления строки с номером i и столбца с номером j.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ имеем $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число, равное значению минора M_{ij}, если i+j четное, и равное значению минора с противоположным знаком (-M_{ij}) в противном случае. Алгебраическое дополнение будем обозначать символом A_{ij}. Таким образом $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например, для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\4&1&3\\2&3&4\end{pmatrix}$ имеем $A_{21}=-\begin{vmatrix}2&5\\3&4\end{vmatrix}$.

Определитель равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Например, для матрицы второго порядка имеем $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$.

Представление определителя в виде сумме произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения называется разложением по элементам этой строки или столбца.

Например, вычислим определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\4&1&3\\2&3&4\end{pmatrix}$ путем разложения по элементам первой строки. Имеем

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&5\\4&1&3\\2&3&4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&3\\3&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&3\\2&4\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}4&1\\2&3\end{vmatrix}=1(4-9)-2(16-6)+5(12-2)=25.$$

При вычислении определителей матрицы второго порядка мы воспользовались приведенной ранее формулой.

Отметим, однако, что непосредственное применение метода разложения по строке или столбцу для определителя большого порядка приводит к большому числу операций. Существенно упрощают процесс вычислений следующие три свойства определителей.

1. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак на противоположный.
2. При умножении стоки или столбца на некоторый множитель определитель умножается на этот множитель.
3. Определитель не изменится, если к элементам одной строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на некоторый множитель.

Приведем пример применения этих свойств при вычислении определителя.

Задача. Вычислить $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&1\\2&6&4&6\\3&8&5&4\\1&5&6&3\end{vmatrix}$.

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей вычтем первую, умноженную на 3; из четвертой вычтем первую.

Тогда $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. Разложив определитель по первому столбцу, получаем $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. Из первой строки вынесем множитель 2.

$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2; из третьей вычтем первую, умноженную на 3. Получаем $\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix}$. Разложим по первому столбцу $\Delta = 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 52$

Теперь перейдем непосредственно к решению задачи.

Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Разложим данный определитель по элементам третьей строки. (Отметим, что выбор строки или столбца не влияет на конечный результат. В данном случае это просто удобнее, чтобы уже на первом этапе выделить неизвестную величину.)

Получаем $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

Полученные четыре определителя третьего порядка вычислим путем разложения по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 1(24-18) - 3(12-10) + 1(18-20) = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2(24-18) - 3(18-12) + 1(27-24) = -3.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(12-10) - 1(18-12) + 1(15-12) = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 2(18-20) - 1(27-24) + 3(15-12) = 2.$$

Следовательно, имеем 1(-2)-x(-3)+2(1)-3(2)=0. 3x=6. x=2.

Ответ: x=2.

<u>Задача 2</u>. Дано: $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 12$. Угол между векторами равен φ=π/3.

Найти:

а) косинус угла между векторами $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ и $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$;

б) проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$;

в) площадь параллелограмма построенного на этих векторах.

Для решения части а) данной задачи вспомним следующие основные свойства скалярного произведения векторов.

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - это скалярная величина, равная произведению их модулей на косинус угла между ними, то есть $(\vec{a}\vec{b}) = |a||b|\cos\varphi$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(\vec{a}\vec{a}) \ge 0$. При этом $(\vec{a}\vec{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = 0$.
2. $(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a})$.
3. $(\lambda\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.
4. $(\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})) = (\vec{a}\vec{b}) + (\vec{a}\vec{c})$.

Заметим что $(\vec{a}\vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

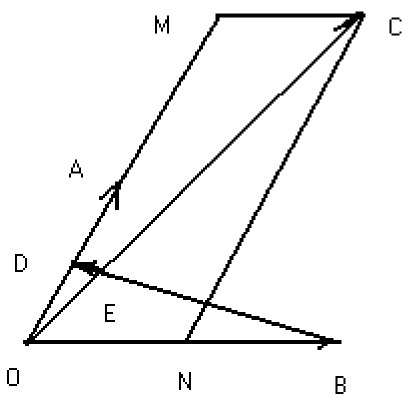
А теперь представим себе, что имеется некоторая операция, называемая скалярным произведением, которая любым двум векторам ставит в соответствие некоторое число и при этом удовлетворяет четырем вышеуказанным свойствам. Тогда, зная способ вычисления скалярного произведения, мы можем вычислять модуль вектора, углы между векторами, проекцию одного вектора на другой по следующим формулам:

1.модуль вектора $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\vec{a})}$;

2.угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ cosφ=$\dfrac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

3.проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{b}|}$.

Перейдем к решению задачи. Пусть $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$. $\vec{ON}=\frac{1}{2}\vec{b}$,



$\vec{OM}=2\vec{a}$, $\vec{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{c}=2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\vec{OC}$, $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}=\vec{BD}$. Искомый угол ψ- это $\angle$DEC.

Согласно определению скалярного произведения, имеем $\cos\psi=\frac{(\vec{c}\vec{d})}{|\vec{c}||\vec{d}|}$. Прежде чем перейти к вычислению заметим, что: $(\vec{a}\vec{a})=|\vec{a}|^2=64$, $(\vec{b}\vec{b})=|\vec{b}|^2=144$, $(\vec{a}\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=8\bullet 12\bullet\frac{1}{2}=48$.

Используя свойства скалярного произведения, получаем

$$(\vec{c}\vec{d})=((2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}))=2\bullet\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{a})+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}(\vec{b}\vec{a})-2(\vec{a}\vec{b})-\frac{1}{2}(\vec{b}\vec{b})=(\vec{a}\vec{a})-\frac{7}{4}(\vec{a}\vec{b})-$$

$$-\frac{1}{2}(\vec{b}\vec{b})=64-84-72=-92.$$

$$(\vec{c}\vec{c})=((2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})(2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}))=2\bullet 2(\vec{a}\vec{a})+\frac{1}{2}\bullet 2(\vec{b}\vec{a})+2\bullet\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b})+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}(\vec{b}\vec{b})=4(\vec{a}\vec{a})+2(\vec{a}\vec{b})+$$

$$+\frac{1}{4}(\vec{b}\vec{b})=256+96+36=388.$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{(\vec{c}\vec{c})}=\sqrt{388}\ .$$

$$(\vec{d}\vec{d})=((\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b})(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}))=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{b}\vec{a})-\frac{1}{2}(\vec{a}\vec{b})+(\vec{b}\vec{b})=\frac{1}{4}(\vec{a}\vec{a})-(\vec{a}\vec{b})+$$

$$+(\vec{b}\vec{b})=16-48+144=112.$$

$$|\vec{d}|=\sqrt{(\vec{d}\vec{d})}=\sqrt{112}\ .$$

Значит $\cos\psi=\frac{-92}{\sqrt{388}\sqrt{112}}$.

(Для сравнения решите эту задачу методами обычной геометрии и оцените трудоемкость двух подходов.)

б) Проекция вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ $np_{\vec{d}}\,\vec{c}=\frac{(\vec{c}\vec{d})}{|\vec{d}|}=-\frac{92}{\sqrt{112}}$.

в) Напомним некоторые свойства векторного произведения, необходимые для решения данной задачи.

1.Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен произведению их модулей на синус угла между ними $|[\vec{a}\times\vec{b}]|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ и равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

2. $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=-\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$.

3. $\left[k\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left[\vec{a}\times k\vec{b}\right]=k\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$.

4. $\left[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\right]=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]+[\vec{a}\times\vec{c}]$.

Заметим, что $[\vec{a}\times\vec{a}]=0$.

Тогда искомая площадь параллелограмма S равна

$$\left|\left[\vec{c}\times\vec{d}\right]\right|=\left|\left[(2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})\times(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b})\right]\right|=\left|2\bullet\frac{1}{2}[\vec{a}\times\vec{a}]+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]-2\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]-\frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{b}\right]\right|=$$

$$=\left|0-\frac{1}{4}\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]-2\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]-0\right|=\left|-\frac{9}{4}\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|=\frac{9}{4}\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|=\frac{9}{4}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=$$

$$=\frac{9}{4}\bullet8\bullet12\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}=108\sqrt{3}.$$

Ответ: $\cos\psi=\dfrac{-92}{\sqrt{388}\sqrt{112}}$, $n\mathrm{p}_{\vec{d}}\,\vec{c}=\dfrac{(\vec{c}\vec{d})}{|\vec{d}|}=-\dfrac{92}{\sqrt{112}}$, S=$108\sqrt{3}$.

<u>Задача 3</u>. Найти вектор $\vec{a}$, если $\vec{a}\perp\vec{b}=\{2;1;-1\}$, $\vec{a}\perp\vec{c}=\{0;3;-2\}$, $(\vec{a}\vec{d})=6$, где $\vec{d}=\{1;1;1\}$.

Прежде чем перейти к решению вспомним два факта, касающиеся скалярного произведения векторов.

1.Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow(\vec{a}\vec{b})=0$.

2.Если в ортонормированном базисе координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, то $(\vec{a}\vec{b})=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$.

Решение. Пусть $\vec{a}=\{x;y;z\}$, где x, y, z - неизвестные.

Так как $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $(\vec{a}\vec{b})=0$. Отсюда 2x+y-z=0.

Так как $\vec{a}\perp\vec{c}$, то $(\vec{a}\vec{c})=0$. Отсюда 3y-2z=0.

Так как $(\vec{a}\vec{d})=6$, то x+y+z=6.

Для нахождения неизвестных получаем систему уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=6,\\3y-2z=0,\\2x+y-z=0.\end{cases}$$

Решим систему методом Крамера. Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&3&-2\\2&1&-1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}=(-3+2)+2(-2-3)=-11.$$

(вычислен разложением по первому столбцу).

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}6&1&1\\0&3&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}3&-2\\1&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&1\\3&-2\end{vmatrix}=6(-3+2)=-6.$$

(вычислен разложением по первому столбцу).

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\0&0&-2\\2&0&-1\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}0&-2\\2&-1\end{vmatrix}=-6(0-(-4))=-24.$$

(вычислен разложением по второму столбцу).

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&1&6\\0&3&0\\2&1&0\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}0&3\\2&1\end{vmatrix}=6(0-6)=-36.$$

(вычислен разложением по третьему столбцу).

Тогда $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{6}{11}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{24}{11}$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{36}{11}$.

Приведем второй способ решения этой задачи, использующий некоторые свойства векторного произведения.

Напомним, что векторное произведение векторов $[\vec{a}\times\vec{b}]$, это вектор перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ортонормированном базисе имеют координаты $\vec{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$, то координаты векторного произведения могут быть вычислены по формуле

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\X_1&Y_1&Z_1\\X_2&Y_2&Z_2\end{vmatrix}.$$

Перейдем к решению. Поскольку неизвестный вектор $\vec{a}$ перпендикулярен векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то он параллелен их векторному произведению. Тогда $\vec{a}=\lambda[\vec{b}\times\vec{c}]$, где λ -неизвестное число.

Имеем $[\vec{b}\times\vec{c}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-1\\0&3&-2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&-1\\3&-2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2&-1\\0&-2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2&1\\0&3\end{vmatrix}=$

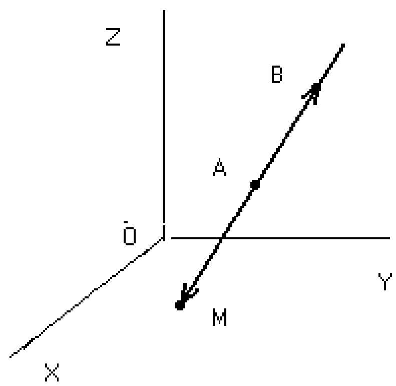
$=\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}=\{1;4;6\}$.

Тогда $\vec{a}=\lambda[\vec{b}\times\vec{c}]=\{\lambda;\ 4\lambda;6\lambda\}$. Так как $(\vec{a}\vec{d})=6$, то $\lambda+4\lambda+6\lambda=6$.

$11\lambda=6$. $\lambda=\dfrac{6}{11}$. Значит, вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\vec{a}=\left\{\dfrac{6}{11};\dfrac{24}{11};\dfrac{36}{11}\right\}$.

Ответ: $\vec{a}=\left\{\dfrac{6}{11};\dfrac{24}{11};\dfrac{36}{11}\right\}$.

<u>Задача 4</u>. Найти точку пересечения прямой, проходящей через точки A(4;6;8) и B(5;8;9), с плоскостью (XOY).



Пусть точка M(x;y;z) является искомой точкой. Поскольку эта точка лежит в плоскости (XOY), то z=0.

Так как векторы $\vec{AM}$ и $\vec{AB}$ лежат на одной прямой, то они коллинеарны.

Напомним **что векторы** $\vec{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}$, $\vec{b}=\left\{X_2;Y_2;Z_2\right\}$ **коллинеарны тогда, и только тогда, когда** $\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}$.

Напомним **формулу вычисления координат вектора, соединяющего две точки** $M_1(x_1,y_1,z_1)$ **и** $M_2(x_2,y_2,z_2)$**:**

$\vec{M_1M_2}=\left\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right\}$.

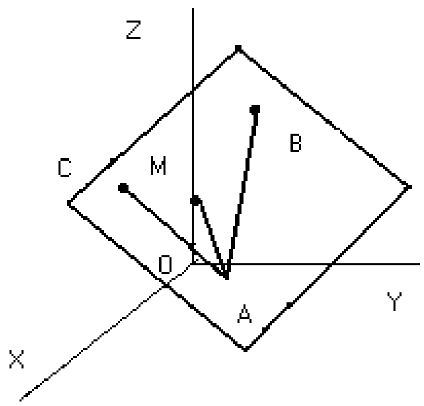
Тогда $\vec{AB}=\{1;2;1\}$, $\vec{AM}=\{x-4;y-6;-8\}$. Из условия их коллинеарности получаем $\frac{x-4}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{-8}{1}$.

Следовательно: $\frac{x-4}{1}=-8$, x-4=-8, x=-4;

$\frac{y-6}{2}=-8$; y-6=-16; y=-10.

Ответ: M(-4;-10;0).

<u>Задача 5</u>. Средствами векторной алгебры найти точку пересечения плоскости, проходящей через точки A(1;2;1), B(-3;-3;4), C(2;-1;3) с осью Z.



Так как точка M лежит на оси Z, то она имеет координаты M(0;0;z), где z - неизвестное число. Так как точки A, B, C, M лежат в одной плоскости, то векторы $\vec{AM}$, $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ - компланарны. Следовательно, их смешанное произведение равно нулю.

Напомним, что смешанное произведение трех векторов $\vec{a}=\left\{X_1;Y_1;Z_1\right\}$, $\vec{b}=\left\{X_2;Y_2;Z_2\right\}$,

$\vec{c}=\{X_3;Y_3;Z_3\}$ по определению равно $(\bar{a}\cdot\vec{b}\cdot\bar{c})=([\bar{a}\times\vec{b}]\cdot\bar{c})$ и вычисляется по формуле

$$(\bar{a}\cdot\vec{b}\cdot\bar{c})=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Так как $\vec{AM}$={-1;-2;z-1}, $\vec{AB}$={-4;1;3}, $\vec{AC}$={1;-3;2}, то из условия ($\vec{AM}\cdot\vec{AB}\cdot\vec{AC}$)=0 получаем уравнение для определения z.

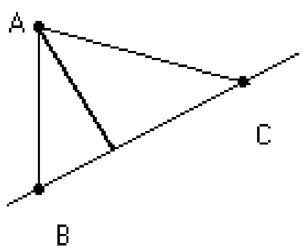
(Отметим, то полученное уравнение аналогично рассмотренному в задаче 1).

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & z-1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0,\ \ (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

-11-22+11(z-1)=0, 11z=44. Z=4.

Ответ: M(0;0;4).

Задача 6. Средствами векторной алгебры найти расстояние от точки A(3;2;5) до прямой, проходящей через точки B(1;4;9) и C(3;7;1).



Расстояние от точки A до прямой BC равно высоте h треугольника ABC, проведенной из вершины A. Для площади треугольника известна формула $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h$. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$.

Используя свойства векторного произведения, имеем $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{BA}\times\vec{BC}\right]\right|$. Поскольку длина стороны BC равна $\left|\vec{BC}\right|$, получаем следующую формулу для вычисления расстояния

$$h=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{\left|\left[\vec{BA}\times\vec{BC}\right]\right|}{\left|\vec{BC}\right|}.$$

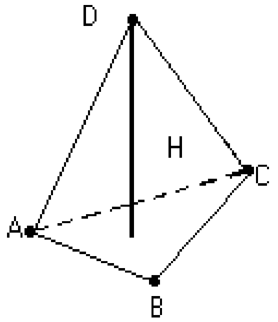
$\vec{BC}$={2;3;-8}. $\left|\vec{BC}\right|=\sqrt{4+9+64}=\sqrt{77}$. $\vec{BA}$={2;-2;-4}.

$$\left[\vec{BA}\times\vec{BC}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\{28;8;10\}\cdot$$

$\left|\left[\vec{BA}\times\vec{BC}\right]\right|=\sqrt{784+64+100}=\sqrt{948}$; $h=\frac{\sqrt{948}}{\sqrt{77}}$. Ответ: $h=\frac{\sqrt{948}}{\sqrt{77}}$.

<u>Задача 7</u>. Средствами векторной алгебры найти расстояние от точки D(4;9;1) до плоскости, проходящей через точки A(4;0;0), B(1;1;2) и C(6;-4;2).

Решение. Расстояние от точки D до плоскости ABC равно длине высоты H в пирамиде ABCD, проведенной из вершины D. Так как объем пирамиды $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}H$, то $H=\frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}$. Объем пирамиды равен одной шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$. Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения известно, что модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.



Тогда $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right|$. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right|$.

Следовательно $H=\dfrac{\left|\left(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right|}{\left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right|}$.

Имеем $\vec{AB}$={-3;1;2}, $\vec{AC}$={2;-4;2}, $\vec{AD}$={0;9;1}.

$$\left(\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 0 & 9 & 1\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 9 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 9\end{vmatrix}=$$

=-3(-4-18)-(2)+2(18)=100.

$$\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 2 & -4 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=\{10;10;10\}.$$

$$\left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right|=\sqrt{100+100+100}=10\sqrt{3}.$$

Тогда H=$\frac{100}{10\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: H=$\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

<u>Задача 8</u>. В параллелограмме ABCD: AB=12, AD=24, $\angle$A=$\frac{\pi}{3}$. Точка M, лежащая на стороне BC, делит эту сторону в отношении BM:MC=1:3, точка N, лежащая на стороне CD, делит эту сторону в отношении CN:ND=1:5. Найти косинус угла $\angle$MAN.

Решение. Сформулируем условие этой задачи на языке аналитической геометрии. Искомый угол - это угол между векторами $\vec{AM}$ и $\vec{AN}$. Стороны параллелограмма AB и AD будем рассматривать как векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$. При этом $\left|\vec{AB}\right| = 12$, $\left|\vec{AD}\right| = 24$.
Угол между этими векторами равен $\frac{\pi}{3}$.
Из правила сложения векторов следует:
$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$. Так как $\vec{BM} = \frac{1}{4}\,\vec{BC} = \frac{1}{4}\,\vec{AD}$, то $\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{4}\,\vec{AD}$;
$\vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN}$. Так как $\vec{DN} = \frac{5}{6}\,\vec{DC} = \frac{5}{6}\,\vec{AB}$, то $\vec{AN} = \vec{AD} + \frac{5}{6}\,\vec{AB}$.
Далее мы фактически повторяем решение, приведенное в задаче 2.

Пусть $\angle$MAN=α. Тогда cosα=$\dfrac{\left(\vec{AM}\,\vec{AN}\right)}{\left|\vec{AM}\right|\left|\vec{AN}\right|}$.

Предварительно вычислим: $(\vec{AB}\ \vec{AB})$=144, $(\vec{AD}\ \vec{AD})$=576, $(\vec{AB}\ \vec{AD})$=$|\vec{AB}||\vec{AD}|\cos\frac{\pi}{3}$=$12\cdot 24\cdot\frac{1}{2}$=144.

$(\vec{AM}\ \vec{AN})$=$((\vec{AB}+\frac{1}{4}\,\vec{AD})(\vec{AD}+\frac{5}{6}\,\vec{AB}))$=$(\vec{AB}\ \vec{AD})+\frac{1}{4}(\vec{AD}\ \vec{AD})+\frac{5}{6}(\vec{AB}\ \vec{AB})$ $+\frac{5}{24}(\vec{AD}\ \vec{AB})$=144+144+120+30=438.

$(\vec{AM}\ \vec{AM})$=$((\vec{AB}+\frac{1}{4}\,\vec{AD})(\vec{AB}+\frac{1}{4}\,\vec{AD}))$=$(\vec{AB}\ \vec{AB})+\frac{1}{2}(\vec{AB}\ \vec{AD})+$ $+\frac{1}{16}(\vec{AD}\ \vec{AD})$=144+72+36=252. Значит $|\vec{AM}|=\sqrt{252}$.

$(\vec{AN}\ \vec{AN})$=$((\vec{AD}+\frac{5}{6}\,\vec{AB})(\vec{AD}+\frac{5}{6}\,\vec{AB}))$=$(\vec{AD}\ \vec{AD})+\frac{5}{3}(\vec{AB}\ \vec{AD})+$ $\frac{25}{36}(\vec{AB}\ \vec{AB})$=576+240+100=826. Значит $|\vec{AN}|=\sqrt{916}$.

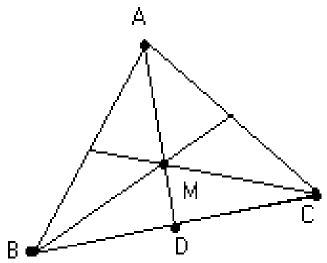
Тогда cosα=$\dfrac{\left(\vec{AM}\,\vec{AN}\right)}{\left|\vec{AM}\right|\left|\vec{AN}\right|}=\dfrac{438}{\sqrt{252}\sqrt{916}}$.

Ответ: cosα=$\dfrac{438}{\sqrt{252}\sqrt{916}}$.

Задача 9. Найти точку пересечения медиан в треугольнике ABC: A(0;12;24), B(36;6;6), C(18;48;36).

Напомним формулу деления отрезка в данном отношении. Точка M(x;y;z) делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, если $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$.

Если координаты точек M_1 и M_2 соответственно равны $M_1(x_1;y_1,z_1)$, $M_2(x_2;y_2,z_2)$, то координаты точки M вычисляются по следующим формулам: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.



Решение. Точка $D(x_D, y_D, z_D)$ делит отрезок BC пополам (в отношении λ=1).

Тогда $x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = 27$, $y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = 27$, $z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = 21$.

Известно, что точка пересечения медиан M делит отрезок AD в отношении $\frac{AM}{MD} = 2$.

Следовательно $x_M = \frac{x_A + 2x_D}{3} = 18$, $y_M = \frac{y_A + 2y_D}{3} = 22$, $z_M = \frac{z_A + 2z_D}{3} = 22$.

Ответ: M(18;22;22).

Задача 10. Вершины треугольника ABC имеют координаты: A(4;2), B(10;10), C(20;14).

Найти: а) уравнение и длину медианы, проведенной из вершины A;

б) уравнение и длину высоты, проведенной из вершины A;

в) уравнение биссектрисы, проведенной из вершины A;

г) проекцию точки A на сторону BC;

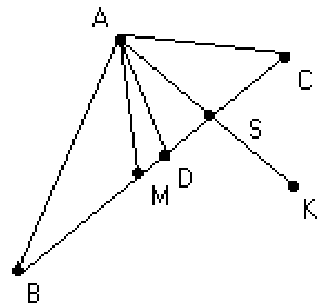
д) точку, симметричную точке A относительно стороны BC.

Прежде чем приступить к решению данной задачи, напомним некоторые сведения об уравнении прямой на плоскости.

1.Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B\}$ (называемому нормальным вектором прямой) может быть записано в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

2. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{l; m\}$ (называемому направляющим вектором прямой) может быть записано в виде $\frac{(x - x_0)}{l} = \frac{(y - y_0)}{m}$.

3. Уравнение вида Ax+By+C=0 (линейное относительно координат x, y) определяет на плоскости прямую линию и вектор $\vec{N} = \{A;B\}$ будет перпендикулярен этой прямой.
4. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой, заданной уравнением Ax+By+C=0 вычисляется по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.



Определим уравнение медианы AM. Точка M($x_M; y_M$) середина отрезка BC. Тогда $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 15$, $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 17$. Следовательно точка M имеет координаты M(15;17). Уравнение медианы на языке аналитической геометрии это уравнение прямой, проходящей через точку A(4;2) параллельно вектору $\vec{AM} = \{11;15\}$. Тогда уравнение медианы имеет вид $\dfrac{x-4}{11} = \dfrac{y-2}{15}$. Длина медианы AM=$\left|\vec{AM}\right| = \sqrt{121+225} = \sqrt{346}$.

Уравнение высоты AS - это уравнение прямой, проходящей через точку A(4;2) перпендикулярно вектору $\vec{BC} = \{10;4\}$. Тогда уравнение высоты имеет вид 10(x-4)+4(y-2)=0, 5x+2y-24=0.

Длина высоты - это расстояние от точки A(4;2) до прямой BC. Данная прямая проходит через точку B(10;10) параллельно вектору $\vec{BC} = \{10;4\}$. Ее уравнение имеет вид $\dfrac{x-10}{10} = \dfrac{y-10}{4}$, 2x-5y+30=0. Расстояние AS от точки A(4;2) до прямой BC, следовательно, равно AS=$\dfrac{|2\cdot 4 - 5\cdot 2 + 30|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \dfrac{28}{\sqrt{29}}$.

Для определения уравнения биссектрисы найдем вектор $\vec{a}$ параллельный этой прямой. Для этого воспользуемся свойством диагонали ромба. Если от точки A отложить единичные векторы одинаково направленные с векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, то вектор, равный их сумме, будет параллелен биссектрисе. Тогда имеем $\vec{a} = \dfrac{1}{\left|\vec{AB}\right|}\vec{AB} + \dfrac{1}{\left|\vec{AC}\right|}\vec{AC}$.

$\vec{AB} = \{6;8\}$, $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{36+64} = 10$, $\vec{AC} = \{16,12\}$, $\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{256+144} = 20$.

Тогда $\vec{a}=\frac{1}{10}\{6;8\}+\frac{1}{20}\{16;12\}=\{\frac{7}{5};\frac{7}{5}\}$. В качестве направляющего вектора искомой прямой может служить вектор $\vec{a}_1=\{1;1\}$, коллинеарный данному. Тогда уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{1}$ или x-y-2=0.

Точка S(x,y) - проекция точки A на прямую BC является точкой пересечения высоты AS и стороны BC. Для определения координат точки S имеем систему уравнений.

$$\begin{cases}5x+2y=24,\\ 2x-5y=-30.\end{cases}$$

Для ее решения воспользуемся формулами Крамера $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$.

$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-29$, $\Delta_x=\begin{vmatrix}24 & 2\\ -30 & -5\end{vmatrix}=-60$, $\Delta_y=\begin{vmatrix}5 & 24\\ 2 & -30\end{vmatrix}=-198$.

Имеем $x=\frac{60}{29}$, $y=\frac{198}{29}$. Следовательно, S имеет координаты S($\frac{60}{29};\frac{198}{29}$).

Для определения координат симметричной точки $K(x_K;y_K)$ воспользуемся тем, что точка S делит отрезок AK пополам (в отношении λ=1). Тогда $x_S=\frac{x_A+x_K}{2}$. Тогда $x_K=2x_s-x_A=2\cdot\frac{60}{29}-4=\frac{4}{29}$. Аналогично $y_K=2y_s-y_A=2\cdot\frac{198}{29}-2=\frac{338}{29}$

K$\left(\frac{4}{29};\frac{338}{29}\right)$

Ответ: уравнение медианы $\frac{x-4}{11}=\frac{y-2}{15}$; длина медианы $\sqrt{346}$; уравнение высоты 5x+2y-24=0; длина высоты $\frac{28}{\sqrt{29}}$; уравнение биссектрисы x-y-2=0; проекция точки A на сторону BC точка S($\frac{60}{29};\frac{198}{29}$); симметричная точка K$\left(\frac{4}{29};\frac{338}{29}\right)$.

<u>Задача 11</u> Даны координаты вершин пирамиды: $A(10;6;6)$, $B(-2;8;2)$, $C(6;8;9)$, $D(7;10;3)$. Требуется найти:

1)косинус угла между ребрами AB и AC;
2)площадь грани ABC;
3)проекцию вектора $\vec{AB}$ на $\vec{AD}$;
4)объем пирамиды;

5)уравнение прямой AD;

6) уравнение плоскости ABC;

7)уравнение и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC;

8)точку K - проекцию точки D на грань ABC;

9)точку P - проекцию точки D на ребро AB.

Напомним некоторые сведения об уравнениях прямой и плоскости в пространстве.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=\{A;B;C\}$ имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2.Уравнение вида Ax+By+Cz+D=0 (линейное относительно координат x y z) определяет в пространстве плоскость и вектор $\vec{N}=\{A;B;C\}$ (называемый нормальным вектором плоскости) перпендикулярен этой плоскости.

3. Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости, заданной уравнением Ax+By+Cz+D=0 равно $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

4.Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{l;m;n\}$ (называемый направляющим вектором) может быть записано в одном из двух видов:

канонический $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$;

параметрический $\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \text{где } t\in(-\infty;+\infty) \\ z=z_0+nt. \end{cases}$

Решение.

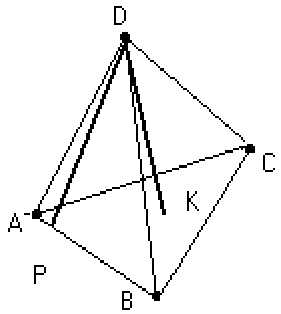
Косинус угла φ между ребрами AB и AC - это косинус угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Имеем $\vec{AB}$={-12;2;-4}, $\vec{AC}$={-4;2;3}. cosφ=$\dfrac{\left(\vec{AB}\,\vec{AC}\right)}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|}$,

$\left(\vec{AB}\,\vec{AC}\right)=(-4)(-12)+2\cdot2+(-4)\cdot3=40$,

$\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{144+4+16}=\sqrt{164}$,

$\left|\vec{AC}\right|=\sqrt{16+4+9}=\sqrt{29}$



Тогда cosφ=$\dfrac{40}{\sqrt{164}\sqrt{29}}$.

Площадь грани ABC - это площадь треугольника ABC, которая равна $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right|$.

$$\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = \{14;52;-16\}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{196+2704+256} = \frac{1}{2}\sqrt{3156} = \sqrt{789}\ .$$

Проекция вектора $\vec{AB}$ на $\vec{AD}$ вычисляется по формуле $\text{пр}_{\vec{AD}}\vec{AB} = \dfrac{\left(\vec{AB}\,\vec{AD}\right)}{\left|\vec{AD}\right|}$. Так как $\vec{AD}$={-3;4;-3}, то $\left|\vec{AD}\right| = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}$,

($\vec{AB}$ $\vec{AD}$)=(-12)(-3)+2·4+(-4)(-3)=56.

Следовательно $\text{пр}_{\vec{AD}}\vec{AB} = \dfrac{56}{\sqrt{34}}$.

Объем пирамиды V_{ABCD} вычисляется по формуле $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}\right)\right|$. Используя формулу вычисления смешанного произведения, получаем

$$\left(\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}\right) = \begin{vmatrix} -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -12(-18) - 2(21) - 4(-10) = 214$$

Следовательно $V_{ABCD} = \dfrac{214}{6} = \dfrac{107}{3}$.

С точки зрения понятий аналитической геометрии уравнение прямой AD - это уравнение прямой проходящей через точку $A(10;6;6)$ параллельно вектору $\vec{AD}$={-3;4;-3}. В каноническом виде уравнение данной прямой имеет вид $\dfrac{x-10}{-3} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z-6}{-3}$, в параметрическом $\begin{cases} x = 10 - 3t, \\ y = 6 + 4t, \\ z = 6 - 3t. \end{cases}$.

Для построения уравнения плоскости ABC воспользуемся следующими соображениями. (Отметим, что в учебниках имеется готовая формула уравнения плоскости, проходящей через три точки, однако мы не будем ее использовать.) Для построения уравнения плоскости необходимо знать точку и вектор, перпендикулярный этой плоскости. Даны координаты трех точек плоскости. Для построения перпендикулярного вектора воспользуемся свойством векторного произведения - векторное произведение векторов перпендикулярно каждому из векторов. Следовательно, если мы имеем два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, то их векторное произведение будет перпендикулярно этой плоскости. Следовательно, перпендикулярный плоскости вектор $\vec{N}$ может быть представлен в виде $\vec{N} = \left[\vec{AB} \times \vec{AC}\right]$.

Данное векторное произведение вычислено ранее. Имеем $\vec{N} = \{14;52;-16\}$.

Тогда уравнение плоскости имеет вид

$$14(x-10)+52(y-6)-16(z-6)=0 \quad \text{или} \quad 7x+26y-8z-178=0.$$

Для того, чтобы найти уравнение высоты, опущенной из вершины D(7;10;3) на грань ABC , будем иметь в виду следующее. Высота - это прямая линия, а для определения уравнения прямой необходимо знать точку и направляющий вектор. Координаты точки D нам известны. Но поскольку прямая перпендикулярна плоскости ABC, то она параллельна вектору $\vec{N} = \{14;52;-16\}$, перпендикулярному данной плоскости. (Координаты данного вектора были найдены при решении предыдущей задачи.)

Зная координаты точки D(7;10;3) и координаты вектора $\vec{N} = \{14;52;-16\}$ получаем следующее параметрическое уравнение искомой прямой.

$$\begin{cases} x = 7 + 14t, \\ y = 10 + 52t, \\ z = 3 - 16t. \end{cases}$$

При определении длины высоты (обозначим ее d), проведенной из вершины D(7;10;3) заметим, что длина высоты равна расстоянию от точки D до плоскости ABC. (Уравнение данной плоскости найдено ранее и имеет вид 7x+26y-8z-178=0.) Используя формулу расстояния от точки до плоскости, получаем

$$d=\frac{|7\cdot 7+26\cdot 10-8\cdot 3-178|}{\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}}=\frac{107}{\sqrt{789}}.$$

(Отметим, что в одной из предыдущих задач длина высоты пирамиды была найдена другим способом.)

Определим точку K - проекцию точки D на грань ABC. Точка K - это точка пересечения высоты и плоскости ABC. (Их уравнения найдены ранее.) Тогда для определения координат точки K имеем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} 7x+26y-8z-178=0, \\ x=7+14t, \\ y=10+52t, \\ z=3-16t. \end{cases}$$

Подставляя последние три соотношения в первое, получаем уравнение для определения значения параметра t, соответствующего точке пересечения.

7(7+14t)+26(10+52t)-8(3-16t)-178=0, 1578t+107=0, $t=-\frac{107}{1578}$.

Подставляя t в последние три соотношения системы, находим координаты точки K. $x=7+14\left(-\frac{107}{1578}\right)=\frac{4774}{789}$;

$y=10+52\left(-\frac{107}{1578}\right)=\frac{5108}{789}$; $z=3-16\left(-\frac{107}{1578}\right)=\frac{3223}{789}$.

Ответ: $K\left(\frac{4774}{789};\frac{5108}{789};\frac{3223}{789}\right)$.

Точка P - проекция точки D на ребро AB является точкой пересечения прямой AB и плоскости, проходящей через точку D перпендикулярно прямой AB. Тогда нормальный вектор этой плоскости $\vec{N}=\vec{AB}$={-12;2;-4}. Уравнение плоскости имеет вид -12(x-7)+2(y-10)-4(z-3)=0 или 6x-y+2z-38=0. Для прямой AB имеем следующее параметрическое уравнение $\begin{cases} x=10-12t; \\ y=6+2t; \\ z=6-4t. \end{cases}$.

Определим точку пересечения прямой AB и плоскости.

$$\begin{cases} 6x-y+2z-38=0; \\ x=10-12t; \\ y=6+2t; \\ z=6-4t. \end{cases}$$

6(10-12t)-(6+2t)+2(6-4t)-38=0, 28-82t=0, t=$\frac{14}{41}$.

Тогда $x = 10 - 12\cdot\frac{14}{41} = \frac{242}{41}$, $y = 6 + 2\cdot\frac{14}{41} = \frac{274}{41}$, $x = 6 - 4\cdot\frac{14}{41} = \frac{190}{41}$.

Ответ: P$\left(\frac{242}{41};\frac{274}{41};\frac{190}{41}\right)$.

<u>**Задача 12**</u>. Решить систему линейных уравнений методом ***Крамера***, методом ***Жордана-Гаусса*** и с помощью *обратной матрицы*.

$$\begin{cases} x + y - z = -5, \\ 3x - 2y + 4z = 42, \\ 5x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$$

Решение методом Крамера. Напомним некоторые вопросы теории решения систем линейных уравнений. Вопросы теории мы будем излагать на примере системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, однако все изложенное верно и для систем более высокого порядка.

Системой трех линейных уравнений с тремя неизвестными (x,y,z) называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3. \end{cases}$$

Матрицей системы называется матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных: $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Определителем системы Δ называется определитель матрицы A

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Столбцом свободных $\vec{h}$ называется столбец вида: $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$.

Если определитель системы не равен нулю Δ≠0, то система уравнений имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Где определитель Δ_x получается из определителя системы путем замены столбца коэффициентов при неизвестном x на столбец свободных членов: $\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

Аналогично $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$.

Перейдем к решению системы $\begin{cases} x + y - z = -5, \\ 3x - 2y + 4z = 42, \\ 5x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$

Определитель системы равен $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 1\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (6+8) - (-9-20) - (-6+10) = 39$.

Определители Δ_x, Δ_y, Δ_z соответственно равны:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 42 & -2 & 4 \\ 8 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 42 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 42 & -2 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 156,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & 42 & 4 \\ 5 & 8 & -3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 42 & 4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 42 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -117,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 42 \\ 5 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -2 & 42 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 42 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 234.$$

Получаем: x=$\frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{156}{39} = 4$, y=$\frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{117}{39} = -3$, z=$\frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{234}{39} = 6$.

Метод Жордана-Гаусса решения систем линейных уравнений.

Правило Крамера применимо лишь для решения таких систем, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, и определитель отличен от нуля. Более общим методом является метод Жордана-Гаусса.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Матрица системы А - составленная из коэффициентов при неизвестных имеет размерность (m×n) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица В имеет размерность (m×(n+1)) и получается присоединением к матрице системы А столбца свободных членов (для наглядности отделенного вертикальной чертой):

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$ Расширенная матрица полностью определяет систему уравнений.

Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матрицы назовем следующие действия:

а) перестановка местами двух строк (столбцов) матрицы;

б) умножение любой строки (столбца) на любое число не равное нулю;

в) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца) умноженной на любое число;

г) вычеркивание строки (столбца) , состоящей из одних нулей.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений назовем следующие действия:

а) перестановка местами двух уравнений системы;

б) умножение любого уравнения системы на любое число, не равное нулю;

в) прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число;

г) вычеркивание уравнения, в котором все коэффициенты и свободный член равны нулю.

Элементарные преобразования переводят данную систему линейных уравнений в эквивалентную систему. Элементарным преобразованиям системы соответствуют аналогичные элементарные преобразования строк ее расширенной матрицы.

Суть метода Жордана-Гаусса решения системы линейных уравнений состоит в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. На первом этапе исключается неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Применительно к расширенной матрице это означает, что с помощью элементарных преобразований строк получаем матрицу, в которой все элементы первого столбца, кроме a_{11} равны нулю. Этого можно добиться следующим образом:

- переставляем строки расширенной матрицы так, чтобы элемент a_{11} не был равен нулю (при решении систем с большим числом неизвестных предпочтительна такая перестановка строк, при которой элемент a_{11} оказывается наибольшим по абсолютной величине);
- из второй строки вычитаем первую, умноженную на $\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$;
- из третьей строки вычитаем первую, умноженную на $\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$;
- аналогично поступаем с остальными строками.

В итоге расширенная матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdot & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a'_{m2} & \cdot & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

Если среди элементов второго столбца $a'_{22}, a'_{32}, \ldots, a'_{m2}$ найдется хотя бы один не равный нулю, то аналогичными элементарными преобразованиями строк, начиная со второй (первая строка не используется) добиваемся того, чтобы все элементы второго столбца, стоящие ниже второго элемента, были равны нулю. Если же $a'_{22} = a'_{32} = \ldots = a'_{m2} = 0$, то перенумеруем неизвестные так, чтобы среди названных элементов нашелся ненулевой. (Перенумерации неизвестных соответствует перестановка столбцов расширенной матрицы).

Аналогичным образом добиваемся того, чтобы в третьем столбце все элементы, стоящие ниже третьего, были равны нулю и так далее.

Если в процессе элементарных преобразований получается строка вида (0 0... 0 | d_i), где $d_i \neq 0$, то это соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = d_i$, которое не имеет решений и, следовательно, система является несовместной.

Если в процессе элементарных преобразований получается строка вида (0 0... 0 | 0), то ее вычеркиваем.

В общем случае в результате описанных элементарных преобразований получим расширенную матрицу вида:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} \cdot c_{1k} & c_{1n} & & d_1 \\ 0 & c_{22} \cdot c_{2k} & c_{2n} & & d_2 \\ . & . \; . \; . & . & & . \\ c_{k1} & c_{k2} \cdot c_{kk} & c_{kn} & & d_k \end{array}\right), \text{ где } c_{11} \neq 0, c_{22} \neq 0, \ldots, c_{kk} \neq 0..$$

Заметим, что k не обязательно равно m, поскольку некоторые строки в процессе элементарных преобразований могли стать нулевыми и были вычеркнуты.

Рассмотрим два возможных исхода.

1.k=n.

В этом случае последней строке расширенной матрицы соответствует уравнение: $c_{nn}x_n = d_n$, откуда $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$. Строке с номером (n-1) соответствует уравнение: $c_{n-1,n-1}x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = d_{n-1}$, из которого при уже известном x_n определяется x_{n-1}. Аналогично определяются остальные неизвестные, в этом случае (k=n) система линейных уравнений имеет единственное решение.

2.k<n.

В этом случае полагаем неизвестные $x_{k+1}, \ldots . x_n$ свободными, то есть, полагаем, что они могут принимать любые значения, а остальные выражаем через них.

Из последней строки расширенной матрицы имеем:

$c_{kk}x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots . + c_{kn}x_n = d_k$,

откуда находим:

$$x_k = \frac{d_k}{c_{kk}} - \frac{c_{k,k+1}}{c_{kk}}x_{k+1} - \ldots . - \frac{c_{kn}}{c_{kk}}x_n .$$

Аналогично с помощью (k-1) строки выражаем неизвестное x_{k-1} и так далее.

В качестве первого примера рассмотрим решение системы уравнений (ранее решенной по правилу Крамера).

$$\begin{cases} x + y - z = -5, \\ 3x - 2y + 4z = 42, \\ 5x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$$

Решение. *Расширенная матрица* имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & 4 & 42 \\ 5 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right)$$

. Умножим первую строку на 3 и вычтем из второй, умножим первую строку на 5 и вычтем из третьей, получаем

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 7 & 57 \\ 0 & -7 & 2 & 33 \end{pmatrix}$. Умножаем вторую строку на $\frac{7}{5}$ и вычитаем из третьей, получаем $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 7 & 57 \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & -\frac{234}{5} \end{array}\right)$.

Последняя строка расширенной матрицы соответствует уравнению $-\frac{39}{5}z = -\frac{234}{5}$. Решая его, получаем z=6.

Вторая строка расширенной матрицы соответствует уравнению -5y+7z=57. Подставляя z=6, получаем -5y +42=57. Тогда y=-3. Из первого уравнения, подставляя z=6, y=-3, получаем x=4.

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 5. \end{cases}.$$

Решение. Расширенная матрица имеет вид:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$. Умножим первую строку на $\frac{1}{2}$ и вычтем из второй, умножим первую строку на $\frac{5}{2}$ и вычтем из третьей, получаем

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$. Вторую строку вычитаем из третьей, получаем.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Последняя строка расширенной матрицы соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -2$. Это уравнение не имеет решений и, следовательно, система несовместна.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 14. \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 14 \end{array}\right)$. Умножим первую строку на $\frac{1}{2}$ и вычтем из второй, умножим первую строку на $\frac{1}{2}$ и вычтем из третьей, умножим первую строку на 2 и вычтем из четвертой, получаем:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$. Умножим вторую строку на (-3) и вычтем из третьей, умножим вторую строку на (-2) и вычтем из четвертой, получаем:

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$. Третью строку вычитаем из четвертой.

$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Четвертая строка нулевая, поэтому ее вычеркиваем. Получаем: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right)$. Последняя строка расширенной матрицы соответствует уравнению $3x_3 - 4x_4 = -1$. Полагая x_4 свободной неизвестной, находим x_3. $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4$. Вторая строка расширенной матрицы соответствует уравнению $-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 = -\frac{1}{2}$. Определяем x_2. Имеем $x_2 = 1 + 3x_3 - 3x_4$. Подставляем x_3. $x_2 = 1 + 3\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4\right) - 3x_4 = x_4$. Из первого уравнения системы $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7$ получаем $2x_1 = 7 - x_2 - 3x_3 - x_4$;

$$2x_1 = 7 - x_4 - 3\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4\right) - x_4 = 8 - 6x_4;\ x_1 = 4 - 3x_4.$$

Ответ: $x_1 = 4 - 3x_4$; $x_2 = x_4$; $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}x_4$; x_4 - свободная неизвестная.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$$
. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 14 \end{array}\right)$$
. Умножим первую строку на 2 и вычтем из второй, первую строку вычтем из третьей, умножим первую строку на 3 и вычтем из четвертой, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
. Вычитаем вторую строку из третьей и четвертой.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
. Удаляем две последние строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$
. Последняя строка соответствует уравнению $x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$. Неизвестные x_3, x_4 полагаем свободными. Тогда $x_2 = 2 - 2x_3 + x_4$. Из первого уравнения системы следует $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$; $x_1 = 4 - x_2 - x_3 - x_4 = 4 - (2 - 2x_3 + x_4) - x_3 - x_4$; $x_1 = 2 + x_3 - 2x_4$.

Ответ: $x_1 = 2 + x_3 - 2x_4$; $x_2 = 2 - 2x_3 + x_4$; x_3, x_4 - свободные неизвестные.

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Прежде чем перейти к изложению метода напомним некоторые понятия.

Произведение матриц.

Произведение матриц AB=C определено только тогда, когда число столбцов в первом множителе (матрица A) равно числу столбцов во втором множителе (матрица B). Результат произведения (матрица C) имеет столько строк, сколько у первого множителя (матрицы А), число столбцов матрицы С равно числу столбцов у второго множителя (матрицы В). Ниже будет указан способ вычисления элементов матрицы С.

Пусть $A(a_{ij})$ размерности $(m \times k)$, $B(b_{ij})$ - $(k \times n)$. Тогда $C(c_{ij})$ (С=АВ) имеет размерность $(m \times n)$. Элементы матрицы c_{ij} вычисляются по формуле $c_{ij} = \sum_{l=1}^{l=k} a_{il} b_{lj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{ik} b_{kj}$.

(То есть элементы строки с номером i в первой матрицы умножаются на соответствующие элементы столбца с номером j во второй матрице и полученные произведения складываются.)

Рассмотрим пример.

Найти матрицу С=АВ, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Поскольку первый множитель имеет две строки, а второй два столбца, то матрица С имеет размерность (2×2). $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Определим элементы матрицы С.

При вычислении c_{11} берем первую строку матрицы А - (2 0 1) и первый столбец матрицы В $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, почленно перемножаем и складываем c_{11}=2 $\times$ 3+0 $\times$ 1+1 $\times$ 5=11.

Аналогично находим :

- c_{12}. Первая строка А - (2 0 1), второй столбец В- $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда c_{12}=2 $\times$ 4+0 $\times$ 0+1 $\times$ 2=10;
- c_{21}. Вторая строка А - (3 2 4), первый столбец В - $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, тогда c_{21}=3 $\times$ 3+2 $\times$ 1+4 $\times$ 5=31;
- c_{22}. Вторая строка А - (3 2 4), второй столбец В- $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда c_{22}=3 $\times$ 4+2 $\times$ 0+4 $\times$ 2=20.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 31 & 20 \end{pmatrix}$.

Отметим, что в общем случае AB≠BA.

Введем понятие *единичной* матрицы. Единичной матрицей называется квадратная матрица E размерности $(n \times n)$, у которой все элементы на главной диагонали равны 1, а остальные нулю. Например, единичная матрица размерности (3×3) имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Элементы единичной матрицы часто обозначают символом δ_{ij}, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Отметим, что для любой матрицы A той же размерности имеет место равенство AE=EA=A.

Для квадратной матрицы определено понятие обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A если выполнено A^{-1}A=A A^{-1}=E.

Если определитель матрицы A не равен нулю, то матрица A имеет обратную.

Далее мы изложим два способа вычисления обратной матрицы.

Первый способ позволяет вычислять элементы обратной матрицы по готовой формуле. Если обозначить a_{ij} - элементы матрицы A (a_{ij}), c_{ij} - элементы обратной матрицы $A^{-1}(c_{ij})$, Δ - определитель матрицы A, то имеем $c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$, где A_{ji} обозначено алгебраическое дополнение к элементу a_{ji} в матрице A.

Приведем пример.

Найти матрицу обратную A, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычисление обратной матрицы удобно проводить по схеме.

1. Вычисляем определитель матрицы A разложением по первой строке.

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-7) - 1 \times 1 + 1 \times (2) = -13 .$$

2. По заданной матрице находим транспонированную матрицу A^T. (Напомним, что транспонированная матрица получается из матрицы А путем замены ее строк столбцами, причем каждая строка заменяется столбцом с тем же номером.)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. В транспонированной матрице A^T каждый элемент заменяем на его алгебраическое дополнение. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} -7 & -9 & 5 \\ -1 & 8 & -3 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$.
4. Полученную матрицу делим на определитель и получаем обратную матрицу.

$$A^{-1} = \frac{1}{(-13)} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 5 \\ -1 & 8 & -3 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{9}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}.$$

Рекомендуем самостоятельно умножить А на A^{-1} и убедиться, что найденная матрица является обратной.

Второй способ нахождения обратной матрицы называется методом присоединенной матрицы. Суть метода состоит в следующем. Если некоторой последовательностью элементарных преобразований строк матрица А приведена к единичной, то та же последовательность элементарных преобразований приводит единичную матрицу к обратной. Последовательность действий при этом методе напоминает метод Жордана-Гаусса.

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Прежде чем перейти к изложению метода напомним некоторые понятия.

Произведение матриц.

Произведение матриц АВ=С определено только тогда, когда число столбцов в первом множителе (матрица А) равно числу столбцов во втором множителе (матрица В). Результат произведения (матрица С) имеет столько строк, сколько у первого множителя (матрицы А), число столбцов матрицы С равно числу столбцов у второго множителя (матрицы В). Ниже будет указан способ вычисления элементов матрицы С.

Пусть $A(a_{ij})$ размерности $(m\times k)$, $B(b_{ij})$ - $(k\times n)$. Тогда $C(c_{ij})$ (C=AB) имеет размерность $(m\times n)$. Элементы матрицы c_{ij} вычисляются по формуле $c_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{l=k}a_{il}b_{lj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+....+a_{ik}b_{kj}$.

(То есть элементы строки с номером i в первой матрицы умножаются на соответствующие элементы столбца с номером j во второй матрице и полученные произведения складываются.)

Рассмотрим пример.

Найти матрицу C=AB, если $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}$.

Поскольку первый множитель имеет две строки, а второй два столбца, то матрица C имеет размерность (2×2). $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$.

Определим элементы матрицы C.

При вычислении c_{11} берем первую строку матрицы A - (2 0 1) и первый столбец матрицы B $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$, почленно перемножаем и складываем c_{11}=2×3+0×1+1×5=11.

Аналогично находим :

- c_{12}. Первая строка A - (2 0 1), второй столбец B- $\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$, тогда c_{12}=2×4+0×0+1×2=10;
- c_{21}. Вторая строка A - (3 2 4), первый столбец B - $\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$, тогда c_{21}=3×3+2×1+4×5=31;
- c_{22}. Вторая строка A - (3 2 4), второй столбец B- $\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$, тогда c_{22}=3×4+2×0+4×2=20.

Ответ: $C=\begin{pmatrix}11 & 10\\ 31 & 20\end{pmatrix}$.

Отметим, что в общем случае AB≠BA.

Введем понятие *единичной* матрицы. Единичной матрицей называется квадратная матрица Е размерности $(n \times n)$, у которой все элементы на главной диагонали равны 1, а остальные нулю. Например, единичная матрица размерности (3×3) имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Элементы единичной матрицы часто обозначают символом δ_{ij} , где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Отметим, что для любой матрицы А той же размерности имеет место равенство АЕ=ЕА=А.

Для квадратной матрицы определено понятие обратной матрицы.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице А если выполнено A^{-1}А=А A^{-1}=Е.

Если определитель матрицы А не равен нулю, то матрица А имеет обратную.

Далее мы изложим два способа вычисления обратной матрицы.

Первый способ позволяет вычислять элементы обратной матрицы по готовой формуле. Если обозначить a_{ij} - элементы матрицы А (a_{ij}), c_{ij} - элементы обратной матрицы A^{-1}(c_{ij}), Δ - определитель матрицы А, то имеем $c_{ij} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$, где A_{ji} обозначено алгебраическое дополнение к элементу a_{ji} в матрице А.

Приведем пример.

Найти матрицу обратную А, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычисление обратной матрицы удобно проводить по схеме.

2. Вычисляем определитель матрицы А разложением по первой строке.

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times (-7) - 1 \times 1 + 1 \times (2) = -13 .$$

3. По заданной матрице находим транспонированную матрицу A^T. (Напомним, что транспонированная матрица получается

из матрицы А путем замены ее строк столбцами, причем каждая строка заменяется столбцом с тем же номером.)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. В транспонированной матрице A^T каждый элемент заменяем на его алгебраическое дополнение. Получаем матрицу $\begin{pmatrix} -7 & -9 & 5 \\ -1 & 8 & -3 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$.
6. Полученную матрицу делим на определитель и получаем обратную матрицу.

$$A^{-1} = \frac{1}{(-13)} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 5 \\ -1 & 8 & -3 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{9}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}.$$

Рекомендуем самостоятельно умножить А на A^{-1} и убедиться, что найденная матрица является обратной.

Второй способ нахождения обратной матрицы называется методом присоединенной матрицы. Суть метода состоит в следующем. Если некоторой последовательностью элементарных преобразований строк матрица А приведена к единичной, то та же последовательность элементарных преобразований приводит единичную матрицу к обратной. Последовательность действий при этом методе напоминает метод Жордана-Гаусса.

Решим этим методом предыдущий пример.
Сформируем матрицу размерности (3×6) , где первые три столбца эта матрица А, а следующие три единичная матрица Е.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Что бы получить в верхнем левом углу единицу, разделим первую строку на 2.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Добьемся того, чтобы все элементы первого столбца, кроме первого стали нулевыми. Для этого из второй строки вычтем первую, из третьей строки вычтем первую умноженную на 2. Получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Добьемся того, чтобы элемент, стоящий на пересечении второй строки и второго столбца, был равен 1. Для этого разделим вторую строку на $\left(\frac{-7}{2}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Добьемся того, чтобы все элементы второго столбца, стоящие ниже второго были равны нулю. Для этого к третьей строке прибавим вторую, умноженную на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{-10}{7} & 1 \end{array}\right).$$

Чтобы элемент на пересечении третьей строки и третьего столбца был равен 1, разделим третью строку на $\frac{13}{7}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{array}\right).$$

Для того чтобы все элементы третьего столбца, лежащие выше третьего стали нулевыми, ко второй строке прибавим третью, умноженную на $\frac{3}{7}$, и из первой вычтем третью, умноженную на $\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{15}{26} & \frac{10}{26} & \frac{-7}{26} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{array}\right).$$ Чтобы все элементы второго столбца, стоящие выше второго были равны нулю, вычтем из первой строки вторую, умноженную на $\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{7}{13} & \frac{9}{13} & \frac{-5}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{array}\right).$$ Таким образом, слева от вертикальной черты мы получили единичную матрицу, тогда справа от вертикальной черты мы имеем обратную. Таким образом

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{9}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-8}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{-10}{13} & \frac{7}{13} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для матрицы большой размерности второй метод существенно более удобен, нежели первый.

Изложим суть метода применения обратной матрицу к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. В векторно-матричной форме система уравнений имеет вид

$A\vec{X} = \vec{h}$, где A - матрица системы, $\vec{X}$ - вектор-столбец неизвестных, $\vec{h}$ - вектор-столбец свободных членов. Если A^{-1} - обратная матрица, то имеем

$$A^{-1}A\vec{X} = A^{-1}\vec{h};\ E\vec{X} = A^{-1}\vec{h};\ \vec{X} = A^{-1}\vec{h}.$$

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y - z = -5, \\ 3x - 2y + 4z = 42, \\ 5x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Вектор столбец неизвестных $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Вектор столбец свободных членов $\vec{h} = \begin{pmatrix} -5 \\ 42 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Найдем обратную матрицу первым способом. Определитель данной матрицы вычислен ранее и равен Δ=39.

Транспонированная матрица равна

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

После замены каждого элемента на алгебраические дополнения получаем матрицу $\begin{pmatrix} 14 & 5 & 2 \\ 29 & 2 & -7 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Тогда обратная матрица равна $A^{-1} = \dfrac{1}{39}\begin{pmatrix} 14 & 5 & 2 \\ 29 & 2 & -7 \\ 4 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{14}{39} & \frac{5}{39} & \frac{2}{39} \\ \frac{29}{39} & \frac{2}{39} & \frac{-7}{39} \\ \frac{4}{39} & \frac{7}{39} & \frac{-5}{39} \end{pmatrix}$. Решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{39} & \frac{5}{39} & \frac{2}{39} \\ \frac{29}{39} & \frac{2}{39} & \frac{-7}{39} \\ \frac{4}{39} & \frac{7}{39} & \frac{-5}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 42 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя произведение, получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{39}(-5) + \frac{5}{39}42 + \frac{2}{39}8 \\ \frac{29}{39}(-5) + \frac{2}{39}42 + \frac{(-7)}{39}8 \\ \frac{4}{39}(-5) + \frac{7}{39}42 + \frac{(-5)}{39}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{156}{39} \\ -\frac{117}{39} \\ \frac{234}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Линии второго порядка.

<u>Определение</u>. ***Линией второго порядка называется линия, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид:***

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 .$$

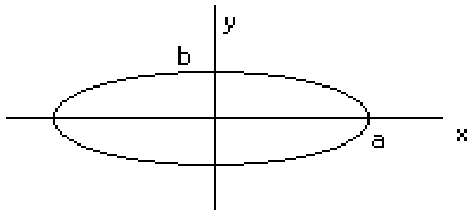
Привести уравнение линии к простейшему виду - значит найти систему координат, в которой уравнение линии имеет наиболее простой вид.

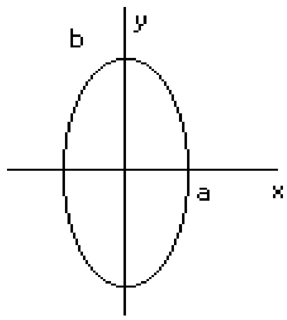
Приведем основные простейшие уравнения кривых второго порядка.

Уравнения *эллипса*.

Каноническое уравнение эллипса:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.



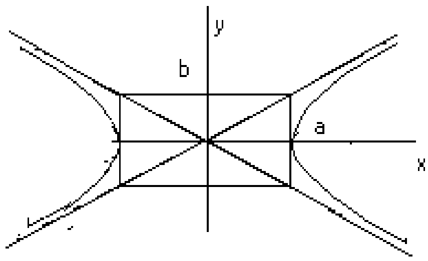


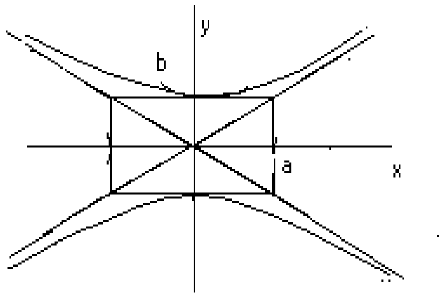
К простейшим уравнениям эллипса относится также уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a < b$.

Уравнения *гиперболы*.

Каноническое уравнение гиперболы:

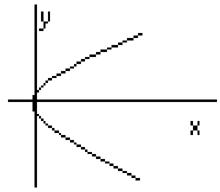
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ - асимптоты гиперболы.





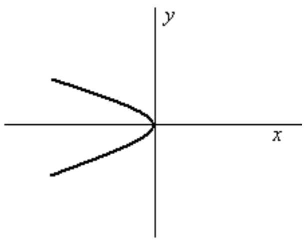
К простейшим уравнениям гиперболы относится также уравнение вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Уравнения *параболы*.
Каноническое уравнение параболы:
$y^2 = 2px$, *(p >0)*.

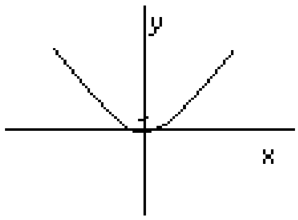


К простейшим уравнениям параболы относятся уравнения вида:

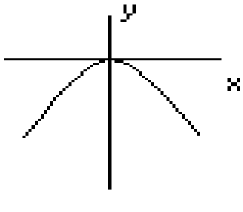
$$y^2 = -2px \;;$$



$$x^2 = 2py$$

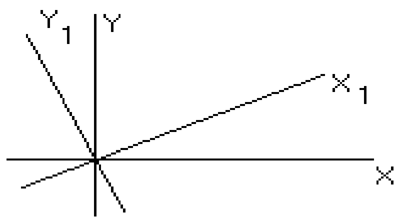


$$x^2 = -2py$$



Пусть в уравнении линии второго порядка коэффициент B не равен нулю. Найдем систему координат (X_1O Y_1) с началом в точке O, повернутую по отношению к системе (XOY) против часовой стрелки на угол φ, такую, что в этой системе координат уравнение линии не содержит произведения координат x_1y_1. Связь между координатами точки M в исходной и повернутой на угол φ системах определяется формулами:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi\,,$$
$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi\,.$$



Подставляя эти соотношения в уравнение линии и раскрыв скобки, получим уравнение вида:

$$A_1 x_1{}^2 + 2B_1 x_1 y_1 + C_1 y_1{}^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F_1 = 0\,,$$

где:

$A_1 = A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi\,,$

$2B_1 = -2A\cos\varphi\sin\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2C\cos\varphi\sin\varphi\,,$

$A_1 = A\sin^2\varphi - 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\cos^2\varphi\,,$

$D_1 = D\cos\varphi + E\sin\varphi\,,$

$E_1 = -D\sin\varphi + E\cos\varphi\,,$

$F_1 = F\,.$

Отметим, что $A_1 + C_1 = A + C$, $A_1 C_1 - B_1{}^2 = AC - B^2$. (При вычислении коэффициентов рекомендуется проверять выполнение этих соотношений.)

Из условия $2B_1 = 0$ получаем уравнение для определения угла φ.

$$-2A\cos\varphi\sin\varphi + 2B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2C\cos\varphi\sin\varphi = 0\,.$$

Разделив его на $2\cos^2\varphi$, получаем уравнение для определения $tg\varphi$.

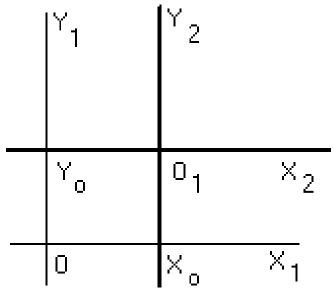
$$Btg^2\varphi + (A - C)tg\varphi - B = 0\,.$$

Заметим, что данное уравнение определяет два значения $tg\varphi$, которые соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям. Рекомендуется выбирать положительное значение $tg\varphi$. Тогда $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}}$, $\sin\varphi = \dfrac{tg\varphi}{\sqrt{1 + tg^2\varphi}}$.

После подстановки соответствующего значения угла уравнение примет вид

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + F_1 = 0.$$

Рассмотрим систему координат ($X_2O_1Y_2$), оси координат которой параллельны осям системы координат (X_1OY_1), а начало (точка O_1) в системе координат (X_1OY_1) имеет координаты (x_0, y_0).



Связь между координатами точки M в указанных системах координат определяется формулами:

$$x_1 = x_2 + x_0,$$

$$y_1 = y_2 + y_0.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение линии и раскрыв скобки, получим уравнение вида:

$$A_2x_2^2 + C_2y_2^2 + D_2x_2 + E_2y_2 + F_2 = 0,$$

где $A_2 = A_1$, $C_2 = C_1$, $D_2 = 2A_1x_0 + D_1$, $E_2 = 2C_1y_0 + E_1$, $F_2 = A_1x_0^2 + C_1y_0^2 + D_1x_0 + E_1y_0 + F_1$.

Если $A_1 \neq 0$ и $C_1 \neq 0$, то выберем x_0, y_0 из условия $D_2 = 0$, $E_2 = 0$. То есть $x_0 = -\frac{D_1}{2A_1}$, $y_0 = -\frac{E_1}{2C_1}$.

Тогда уравнение можно представить в виде:

$$A_2x_2^2 + C_2y_2^2 = H,$$

где $H = A_1x_0^2 + C_1y_0^2 - F_1$. Это уравнение легко исследуется.

Если один из коэффициентов A_1 или C_1 равен нулю, то выбор x_0, y_0 осуществляется по следующей схеме. Пусть для определенности A_1=0. Считаем, что $D_1 \neq 0$. Значения x_0, y_0 выберем из условия $E_2 = 0$, $F_2 = 0$. То есть,

$$y_0 = -\frac{E_1}{2C_1}, \quad x_0 = \frac{C_1y_0^2 - F_1}{D_1}.$$

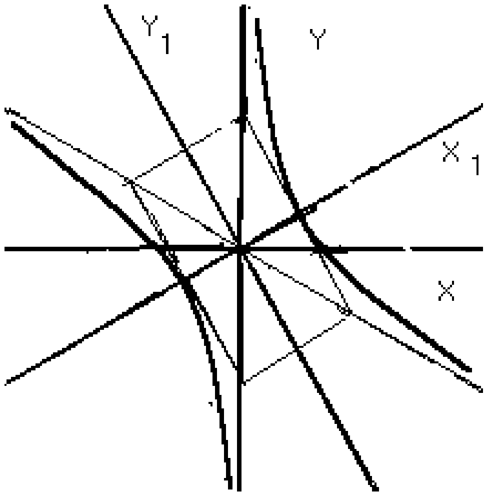
Тогда уравнение примет вид $C_2y_2^2 + D_2x_2 = 0$. Полученное уравнение приводится к простейшему уравнению параболы.

(Замечание. В случае A_1=0, $D_1 = 0$, полагая $y_0 = -\frac{E_1}{2C_1}$, $x_0 = 0$, уравнение приводится к виду $C_2y_2^2 + F_2 = 0$.)

<u>Задача 4</u>. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка $2x^2 + 2\sqrt{3}xy = 3$, определить ее тип и сделать схематический рисунок.

В данном уравнении A=2, 2B=$2\sqrt{3}$, C=0, D=0, E=0, F=-3.

Уравнение для определения угла поворота системы координат имеет вид $\sqrt{3}tg^2\varphi + 2tg\varphi - \sqrt{3} = 0$. Решая квадратное уравнение, получаем $tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $tg\varphi = -\sqrt{3}$. Выбирая первое значение, имеем $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



В системе координат повернутой на угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$ уравнение линии примет вид $3x_1^2 - y_1^2 = 3$. Разделив правую и левую части уравнения на 3, получим $\frac{x_1^2}{1^2} - \frac{y_1^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$. Данное уравнение является каноническим уравнением гиперболы.

<u>Задача 5</u>. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка $x^2 + xy + y^2 = 3$, определить ее тип и сделать схематический рисунок.

В данном уравнении A=1, 2B=1, C=1, D=0, E=0, F=-3.

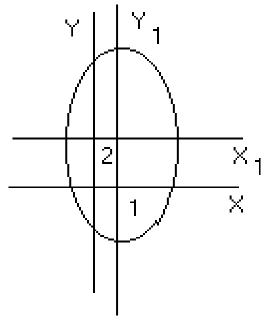
Уравнение для определения угла поворота системы координат имеет вид $tg^2\varphi - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение, получаем $tg\varphi = 1$, $tg\varphi = -1$. Выбирая первое значение, имеем $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. В системе координат повернутой на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ уравнение линии примет вид $\frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}y_1^2 = 3$. Разделив правую и левую части уравнения на 3, получим $\frac{x_1^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{y_1^2}{(\sqrt{6})^2} = 1$. Данное уравнение является простейшим уравнением эллипса.

<u>Задача 6</u>. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка $4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 8 = 0$, определить ее тип и сделать схематический рисунок.

В данном уравнении A=4, 2B=0, C=1, D=-8, E=-4, F=-8. Поскольку коэффициент B равен нулю, то нет необходимости делать поворот осей координат. Как было уже указано, при переносе начала

системы координат в точку с координатами (x_0, y_0) имеем следующие соотношения: $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$.
Подставляя их в уравнение линии и раскрывая скобки, получаем
$4x_1^2 + y_1^2 + (8x_0 - 8)x_1 + (2y_0 - 4)y_1 + (4x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 4y_0 - 8) = 0$.
Приравнивая нулю коэффициенты при x_1 и y_1, получаем:

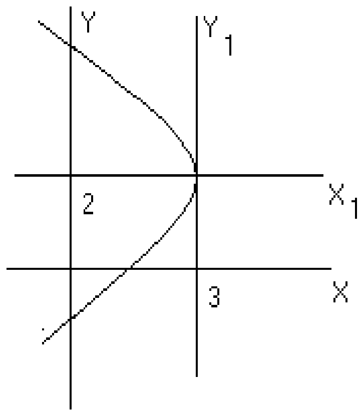
$$8x_0 - 8 = 0,$$
$$2y_0 - 4 = 0.$$



Тогда $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Уравнение примет вид $4x_1^2 + y_1^2 = 16$. Его перепишем в виде $\frac{x_1^2}{2^2} + \frac{y_1^2}{4^2} = 1$. Это уравнение является простейшим уравнением эллипса.

<u>Задача 7</u>. Привести к простейшему виду уравнение линии второго порядка $y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$, определить ее тип и сделать схематический рисунок.

В данном уравнении A=0, 2B=0, C=1, D=4, E=-4, F=-8. Поскольку коэффициент B равен нулю, то нет необходимости делать поворот осей координат. Перенесем начало системы координат в точку с координатами (x_0, y_0). Между координатами точки в различных системах имеем следующие соотношения: $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$.



Подставляя их в уравнение линии и раскрывая скобки, получаем
$y_1^2 + 4x_1 + (2y_0 - 4)y_1 + (y_0^2 + 4x_0 - 4y_0 - 8) = 0$.
Из условия равенства нулю коэффициента при y_1 получаем: $2y_0 - 4 = 0$, $y_0 = 2$.

Приравнивая нулю свободный член, получаем:
$(y_0^2 + 4x_0 - 4y_0 - 8) = 0$, $x_0 = 3$.
Уравнение примет вид $y_1^2 + 4x_1 = 0$.
Это уравнение является простейшим уравнением параболы.

Литература

Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика том 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд. 5 стереотип. «Дрофа» Москва 2003 г .

Н.В.Ефимов. Краткий курс аналитической геометрии. «Физматлит», Москва 2002 г.

Д.В.Клетеник. Сборник задач по аналитической геометрии. Изд. 17-е стереотип. «Профессия», Санкт-Петербург 2002 г.

Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Сборник задач по высшей математике. «Физматлит», Москва 2001 г.