

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**Московский государственный университет
приборостроения и информатики**



кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

учебное пособие для студентов.

Москва 2006

УДК 517.

Кратные и криволинейные интегралы. Учебное пособие для студентов. Сост.: к.ф.-м.н., доц.. Загинайко В.А. /МГУПИ. М. 2006.

Излагаются теория и применение криволинейных и кратных интегралов. Приведены примеры решения задач.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дневной форме обучения. Библиогр: 3.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Соколов В.В.

Кратные и криволинейные интегралы.

Введение.

Предлагаемое пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит элементарную теорию кратных и криволинейных интегралов с примерами вычислений. Объём материала здесь примерно соответствует программе соответствующих разделов курса высшей математики технических вузов. Во второй части более углублённо рассматривается понятие измеримости площади и объёма по Риману и по Лебегу, а также даётся понятие площади двумерной поверхности по Лебегу как нижнего предела площадей триангуляций графика функции двух переменных, непрерывных вместе со своими частными производными.

В первой части последовательно рассматривается ориентация простейших фигур (треугольника, тетраэдра) в одномерном, двумерном, трёхмерном и многомерном случаях. Ориентация составной фигуры определяется как согласованная ориентация её частей.

При вычислении площади и объёма этих фигур используется геометрическое понятие определителя как ориентированной площади или объёма, натянутого на пару или тройку векторов. Геометрически двукратный интеграл определяется как ориентированный объём кривоповерхностного цилиндра по аналогии с классическим определением определённого интеграла как ориентированной площади криволинейной трапеции. Площадь или объём рассматриваются классическим способом как предел ступенчатых фигур, приближающих эту площадь или объём. Разбираются решения типичных контрольных заданий на соответствующую тему. Даётся пример взятия кратного интеграла машинным (компьютерным) способом.

Особенностью первой части данного пособия является попытка «осовременить» изложение поверхностных интегралов второго рода. Известные теоремы Лейбница – Ньютона, Грина, Стокса и Остроградского – Гаусса рассматриваются как частные случаи общего утверждения Пуанкаре о связи интеграла по объёму с интегралом по поверхности как топологической границы этого объёма. Указанное утверждение можно рассматривать (как минимум) в качестве мнемонического правила для запоминания упомянутой серии теорем.

Отмечается (на примерах), что при вычислении, в частности, поверхностных интегралов необходимо внимательно следить за ориентацией фигуры для правильной расстановки пределов при замене кратного интеграла на повторный.

Во второй части пособия рассматриваются классические понятия измеримости по Риману и по Лебегу. Даётся схема доказательства интегрируемости непрерывной функции по Риману. Рассматривается критерий интегрируемости по Риману как нулевое значение меры Лебега для множества точек разрыва подынтегральной функции.

Проводится схема доказательства существования площади поверхности по Лебегу для гладкой (то есть непрерывной вместе со своими частными производными) функции двух переменных, и доказывается, что эта площадь равна кратному интегралу определённого вида. При этом площадь поверхности по Лебегу рассматривается как предел нижних граней площадей триангуляций для поверхности графика подынтегральной функции, мелкость разбиения которых не превосходит заданную величину.

Автор надеется, что данное пособие будет способствовать повышению теоретического понимания понятий ориентации, площади и объёма как

фундаментальных математических понятий. Кроме того, это пособие может рассматриваться как теоретическое приложение к руководствам по решению задач по теме: «криволинейные и кратные интегралы» тем более, что оно содержит методические указания по решению контрольных заданий по соответствующей теме.

§ 1 Ориентация.

Прежде чем рассматривать кратные и криволинейные интегралы необходимо рассмотреть лежащее в их основе понятие ориентации.

Ориентация является одним из важнейших понятий топологии. Рассмотрим последовательно это понятие в одномерном, двумерном, трёхмерном и многомерном случаях.

1. Ориентация в одномерном случае ($n = 1$, где n - размерность пространства).

Ориентация на заданной прямой определяет направление движения по прямой (влево – вправо, если прямая горизонтальна, вверх – вниз, если прямая вертикальна или от правого нижнего к правому верхнему углу квадрата, если прямая параллельна диагонали квадрата, расположенного под углом в 45° к его горизонтальной стороне).

Использование этого понятия.

Определим с помощью этого понятия геометрический (свободный) вектор.

Определение. Геометрический вектор определяется тремя параметрами: модулем, направлением и ориентацией.

Модуль вектора есть его длина. Если геометрический вектор представить в виде стрелки, то его длина есть расстояние между началом стрелки и её концом.

Направление вектора определяется множеством прямых, параллельных вектору. Таким образом (согласно данному определению) два вектора имеют одинаковое направление, если стрелки, геометрически представляющие эти вектора, параллельны, хотя, конечно, трудно назвать в обыденном смысле этого слова стрелки, лежащие на одной прямой и направленные в разные стороны однонаправленными. И, тем не менее, будем придерживаться этого определения. Может быть, вместо термина «направление вектора» в нашем смысле лучше было бы использовать термин «параллельность вектора».

Ориентация вектора. Будем считать, что два вектора имеют одинаковую ориентацию, если они имеют одинаковое направление (то есть, параллельны между собой) и направлены в одну и ту же сторону. Аналогично, два вектора имеют противоположную ориентацию, если они имеют одинаковое направление (параллельность) и направлены в противоположные стороны. Следовательно, ориентации можно сравнивать только у параллельных векторов. Таким образом, вопреки сложившейся терминологии, разнонаправленными следует называть непараллельные вектора, однонаправленными следует называть вектора, имеющие одинаковое направление и ориентацию, а противоположно направленными следует называть вектора, имеющие совпадающие направления (параллельности) и противоположные ориентации.

Примечание. К сожалению, плохая обыденная терминология мешает чётко определять понятия, что мы и имеем в случае плохо определённого

обыденного понятия «направление», где смешаны в общую кучу понятия «направление» в нашем смысле (параллельность) и «ориентация» в нашем смысле. Пример противоречия обыденной и более чёткой терминологии. Высказывание «я ничего не хочу», строго говоря, означает, что «я всё хочу». В этом смысле аналогичная фраза на английском языке выражает эту же мысль более чётко: «I want nothing» (то есть «я хочу ничего»), поскольку здесь мы имеем только одно отрицание.

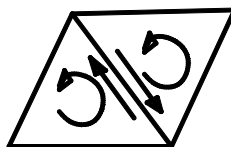
2. Ориентация в двумерном случае ($n = 2$).

Рассмотрим евклидову плоскость и в ней два разнонаправленных вектора. Точнее говоря, имеются в виду два вектора, параллельные плоскости, поскольку имеются в виду свободные вектора, которые равны, если совпадают их модули, направления и ориентации, в отличие, например, от скользящих векторов, у которых сумма противоположно направленных векторов равна не нулю, а вращающему моменту (паре сил). Итак, рассматриваем пару разнонаправленных векторов на плоскости. В математической литературе такая пара векторов называется бивектором. Определение. Ориентация бивектора есть ориентация против часовой стрелки, если переход от направления и ориентации первого вектора к направлению и ориентации второго вектора осуществляется против часовой стрелки. Иногда эту ориентацию называют ориентацией левой руки или просто левой ориентацией, поскольку поворот от большого пальца левой руки к указательному пальцу этой же руки происходит против часовой стрелки (если смотреть на тыльную сторону руки). Аналогично определяется правая ориентация или ориентация по часовой стрелке.

Рекуррентное (возвратное с точки зрения размерности) определение ориентации на плоскости. Треугольник или четырёхугольник называется лево-ориентированным, то есть, имеющим левую ориентацию, если для наблюдателя, находящегося внутри этой фигуры стороны этой фигуры ориентированы (направлены) справа налево. Естественно, если выйти вне этой фигуры, не выходя за плоскость фигуры и смотреть на движение по ближайшей стороне фигуры, не меняя её ориентации, то ориентация движения изменится, и движение будет слева направо.

Очевидно, треугольник или параллелограмм, натянутые на левую пару векторов являются лево-ориентированными, если движение начинается вдоль первого вектора пары. Заметим, что треугольник или четырёхугольник непрерывной деформацией могут быть переведены друг в друга, а также в окружность без изменения направления движения, что означает, что ориентация, как говорят математики, есть топологический инвариант (неизменяемое свойство при непрерывных, то есть топологических преобразованиях, когда малое смещение переходит в малое). Итак, двумерная ориентация выпуклой двумерной фигуры определяется через одномерную ориентацию её контура (одномерного).

Далее, при разбиении (триангуляции) многоугольника на треугольники, некоторые из которых смежны по одной грани (стороне) видно, что, если все треугольники имеют одну и ту же ориентацию (на рисунке - левую), то для любой пары смежных треугольников их ориентация порождает два противоположных направления для каждой смежной стороны.



3. Ориентация в трёхмерном случае ($n = 3$).

Рассмотрим некомпланарную тройку векторов (тривектор) в трёхмерном евклидовом пространстве. Некомпланарность означает, что эти вектора не лежат в одной плоскости или что никакой вектор не лежит в плоскости двух других векторов.

Определение. Ориентация правой руки или правая ориентация в пространстве есть ориентация тривектора: «большой палец», «указательный палец», «средний палец». Аналогично определяется левая ориентация.

Очевидно, никакой тривектор правой ориентации не может быть непрерывной деформацией переведён в тривектор левой ориентации при условии, что никакой вектор из этой тройки не пересечёт плоскость двух других векторов. Иногда правую ориентацию называют ещё ориентацией правого винта, поскольку при этом правая ориентация пары первого и второго векторов тройки (то есть, ориентация «по часовой стрелке») соответствует направлению движения винта, определяемого последним вектором тройки (тривектора). Иначе говоря, правый винт или шуруп ввинчивается в стену правым вращением отвёртки, то есть вращением по часовой стрелке. Аналогично определяется левый винт, который ввинчивается в стену вращением отвёртки против часовой стрелки.

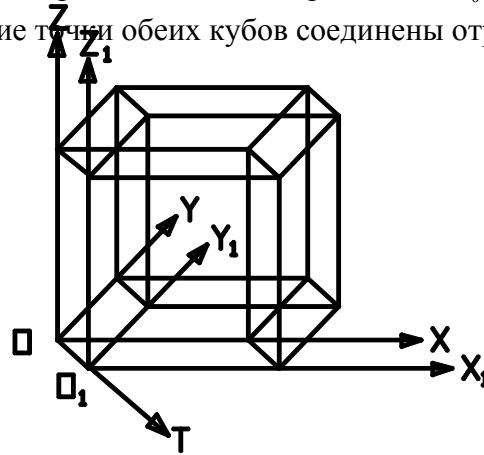
Рекуррентное определение ориентации в пространстве. Аналогично двумерному случаю на плоскости определяется рекуррентно ориентация в пространстве: для наблюдателя, находящегося вне выпуклого многогранника правая ориентация этого многогранника определяется тем, что для этого наблюдателя поверхность ближайшей грани многогранника имеет правую ориентацию, то есть для этого наблюдателя грани многогранника имеют правую ориентацию, то есть, ориентированы по часовой стрелке. Тем самым определяется правая ориентация всей границы (то есть, поверхности) многогранника. Ещё раз напомним, что при этом на общем ребре двух смежных граней индуцируются противоположные ориентации. Заметим, что тетраэдр (треугольная пирамида) или параллелепипед, натянутые на правую тройку векторов, имеют правую ориентацию в смысле рекуррентного определения, поскольку грани, смежные этим векторам имеют правую ориентацию. Аналогично случаю тетраэдра определяется левая или правая ориентация куба или параллелепипеда, натянутого на вектора тройки.

4. Ориентация в многомерном случае.

Определение. Назовём ориентацию n -мерного гиперкуба левой, если для наблюдателя, находящегося вне этого гиперкуба, все ориентации его ближайших $n - 1$ -мерных граней – левые. Аналогично определяется правая ориентация.

Проиллюстрируем это для четырёхмерного гиперкуба ($n = 4$).

Этот куб можно представить на плоскости как последовательность двух трёхмерных кубов в четырёхмерном пространстве-времени (два положения трёхмерного куба в разные моменты времени $t = t_0$ и $t = t_1$), причём соответствующие точки обоих кубов соединены отрезками.



Ориентация этих векторов определяется как ориентация от $t = t_0$ до $t = t_1 = t_0 + dt$. Тогда трёхмерные грани гиперкуба определяются как множества точек с координатами (x, y, z, t) , где по крайней мере одна из координат равна нулю или единице, то есть фиксированы, остальные координаты меняются от нуля до единицы, то есть меняются. Всего их: $1 + 1 + 6 = 8$ (одна грань для $t = t_0$, одна грань для $t = t_1$, шесть граней соответствуют шести граням перемещаемого трёхмерного куба при переменном времени). Перечислим их: $(x, y, z, 0)$, $(x, y, z, 1)$, $(0, y, z, t)$, $(1, y, z, t)$, $(x, 0, z, t)$, $(x, 1, z, t)$, $(x, y, 0, t)$, $(x, y, 1, t)$. Наблюдатель находится внутри (единичного) куба, то есть все 4 его декартовы координаты находятся в интервале $(0, 1)$.

Поскольку левые ориентации трёхмерных граней определены выше, то левая ориентация четырёхмерного куба определяется рекуррентно как левые ориентации его ближайших трёхмерных граней для наблюдателя, находящегося вне четырёхмерного куба.

Заметим, что изображённый на рисунке четырёхмерный куб имеет левую ориентацию, если считать, что ось ОТ направлена к нам (t – компонента четырёхмерного направления вектора зрения от глаза к предмету – отрицательна). При этом, полагая $t_1 > t_0$, мы смотрим на трёхмерную грань $t = t_0$ изнутри четырёхмерного куба. Полагая что y – компонента направления зрения положительна (ось ОУ направлена от нас), видим, что ближайшая двумерная грань ($t = 0, y = 0$) имеет правую ориентацию (взгляд снаружи), что индуцирует правую ориентацию грани $t = 0$ при взгляде изнутри четырёхмерного куба. Следовательно, при взгляде снаружи ближайшая 3 – грань имеет противоположную, левую ориентацию. Поэтому наш четырёхмерный куб окончательно имеет левую ориентацию.

Проверка рассуждения. Ориентация четырёхмерного куба должна совпадать с ориентацией базисной четвёрки XYZT. Рассмотрим пальцы левой руки. Пусть ОХ – это большой палец, ОУ – это указательный палец, а ОZ – это средний палец. Тогда, если средний палец направлен в глаз, то вращение от большого пальца к указательному будет по часовой стрелке, то

есть пара направлений $X\bar{Y}$ имеет правую ориентацию. Рассуждая по аналогии, если смотреть на левую четвёрку $XYZT$ так, чтобы OT было направлено в глаз, следует ожидать, что тройка XYZ будет иметь правую ориентацию. Поскольку так оно и есть (большой палец правой руки направлен вправо, указательный палец – от нас, а средний палец – вверх), то четвёрка $XYZT$, а вместе с ней и четырёхмерный куб имеют левую ориентацию.

Заметим, что условие согласования трёхмерных ориентаций четырёхмерного куба состоит в том, что для общей двумерной грани двух смежных трёхмерных граней их одинаковые трёхмерные ориентации (например, левые) индуцируют (порождают) две противоположные ориентации для этой общей двумерной грани. Читателю рекомендуется нарисовать четырёхмерный куб на большом листе бумаги и проверить этот факт.

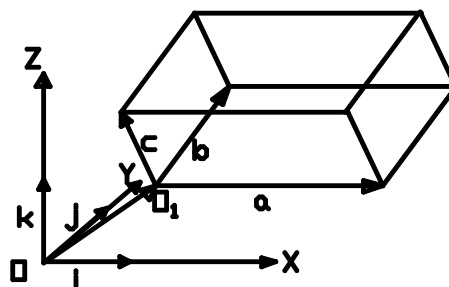
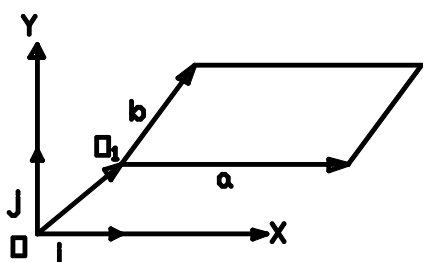
§ 2 Ориентированная площадь и ориентированный объём.

Определение. Множество концов векторов вида $\vec{O}_1 + x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где $(0 \leq x \leq 1)$ и $(0 \leq y \leq 1)$ при условии, что начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают с концом вектора $\vec{O}_1$, называется параллелограммом, натянутым на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Аналогично, множество концов векторов вида $\vec{O}_1 + x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$, где $(0 \leq x \leq 1)$, $(0 \leq y \leq 1)$ и $(0 \leq z \leq 1)$ при условии, что начала векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ совпадают с концом вектора $\vec{O}_1$, называется параллелепипедом, натянутым на вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Определение. Ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть число (как положительное так и отрицательное), причём модуль (абсолютная величина этого числа) есть обычная площадь параллелограмма. Знак этого числа определяется сравнением ориентации пары векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с ориентацией пары базисных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (для простоты можно считать, что $\vec{i}$ и $\vec{j}$ образуют декартов базис, то есть эти вектора имеют единичную длину и взаимно ортогональны (перпендикулярны)). Если ориентация пары $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадает с ориентацией пары $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то ориентированная площадь положительна, если не совпадают, то ориентированная площадь отрицательна.

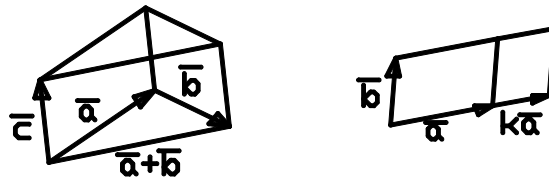
Аналогично определяется ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на тройку векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: это есть число, модуль которого – обычный объём этого параллелепипеда, а знак числа определяется по совпадению ориентаций тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с ориентацией тройки базисных векторов пространства $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.



Определение. Грассманово произведение $\vec{a} \wedge \vec{b}$ двух векторов есть операция, обладающая следующими свойствами.

1. Эта операция линейна относительно своих сомножителей:
 $(k\vec{a} + l\vec{b}) \wedge \vec{c} = k(\vec{a} \wedge \vec{c}) + l(\vec{b} \wedge \vec{c})$.
2. Эта операция антикоммутативна относительно своих сомножителей:
 $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$. Следствие антикоммутативности: $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$.

Нетрудно видеть, что ориентированная площадь обладает свойствами грассманова произведения. Свойство 1 может быть проиллюстрировано рисунком.



Далее, $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$, поскольку ориентация пары $\vec{a}, \vec{b}$ противоположна ориентации пары $\vec{b}, \vec{a}$.

Рассмотрим грассманово произведение двух векторов, разложенных по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ декартова базиса: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ и $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$.

Видно, что:

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \wedge (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x (\vec{i} \wedge \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \wedge \vec{j}) + a_y b_x (\vec{j} \wedge \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \wedge \vec{j}) = \\ &= 0 + a_x b_y (\vec{i} \wedge \vec{j}) + a_y b_x (-\vec{i} \wedge \vec{j}) + 0 = (a_x b_y - a_y b_x) (\vec{i} \wedge \vec{j}). \end{aligned}$$

В данном случае использованы свойства линейности и антикоммутативности грассманова произведения и его следствие: $\vec{i} \wedge \vec{i} = -(\vec{i} \wedge \vec{i}) = -\vec{i} \wedge \vec{i} = 0$; $\vec{j} \wedge \vec{j} = 0$.

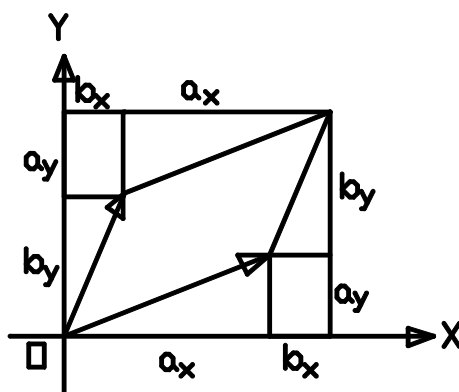
Отсюда видно, что $\vec{a} \wedge \vec{b} = \det(\vec{a}, \vec{b}) \cdot (\vec{i} \wedge \vec{j})$, где $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$ - определитель второго

порядка. Рассматривая $\vec{a} \wedge \vec{b}$ как именованную ориентированную площадь, а величину $\vec{i} \wedge \vec{j}$ как некоторую единицу измерения этой площади, видим, что определитель как

отвлечённое число есть отношение именованных площадей: $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a} \wedge \vec{b})}{(\vec{i} \wedge \vec{j})}$.

Задача. Проверить формулу вычисления определителя второго порядка непосредственно на декартовой плоскости.

Решение вытекает из рисунка.



Именно: $\det(\vec{a}, \vec{b}) = (a_x + b_x)(a_y + b_y) - 2b_x a_y - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a_x a_y) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (b_x b_y) = a_x b_y - a_y b_x$.

Из изложенного выше вытекает, что разница между определителем и грассмановым произведением примерно такая же, как между отвлечённым и именованным числом. В данном случае грассманово произведение играет роль единицы измерения. Само по себе грассманово произведение не число и не вектор, а некий объект, называемый в литературе бивектором.

В пространстве (аналогично случаю плоскости) можно также ввести грассманово произведение трёх векторов (тривектор), обладающее свойствами линейности и антикоммутативности по каждой паре сомножителей. Аналогично случаю плоскости, можно показать, что: $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{i} \wedge \vec{j} \wedge \vec{k})$. Иначе говоря, определитель третьего порядка как отвлечённое число есть отношение пропорциональных между собой тривекторов $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ и $\vec{i} \wedge \vec{j} \wedge \vec{k}$.

§ 3 Двукратный интеграл как ориентированный объём кривоповерхностного цилиндра.

По аналогии с обычным определённым интегралом $\int_a^b f(x) dx \equiv \int_{[a,b]} f(x) dx$ для

знакоопределённой подинтегральной функции $f(x) \geq 0$ или $f(x) \leq 0$ можно ввести понятие двукратного интеграла для знакоопределённой подинтегральной функции двух переменных $f(x, y) \geq 0$ или $f(x, y) \leq 0$ как ориентированный объём кривоповерхностного цилиндра, ограничивающего объём вида:

$V : ((x, y) \in S; z \in [0, f(x, y)])$. Здесь $\in$ означает символ принадлежности точки области, то есть множеству точек. В обоих случаях (плоскости и пространства) интеграл от произвольной (знакопеременной) функции можно определить как алгебраическую сумму интегралов по областям, составляющим всю область интегрирования, в каждой из которых знак подинтегральной функции определён.

Алгоритм вычисления двукратного интеграла следующий. Определим его для областей специального вида: $S : (a \leq x \leq b), (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))$.

1. Выбираем точки разбиения $[x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{m-1}]$ и $[y_1, y_2, \dots, y_l, y_{l+1}, \dots, y_{n-1}]$ прямоугольной области

$$(a = x_0 = \min(x), b = x_m = \max(x)), \left(c = y_0 = \min_{(a \leq x \leq b)}(\varphi_1(x)), d = \max_{(a \leq x \leq b)}(\varphi_2(x)) \right). \text{ При}$$

это точки разбиения упорядочены по возрастанию их индексов, то есть:

$$(a = x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{m-1} < x_m = b) \text{ и}$$

$$(c = y_1 < y_2 < \dots < y_l < y_{l+1} < \dots < y_{n-1} < y_n = d).$$

2. На каждом элементе разбиения $[\Delta x_k = [x_k, x_{k+1}], \Delta y_l = [y_l, y_{l+1}]]$ выбираем точку $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$ такую, чтобы она лежала внутри этого элемента разбиения, то есть, чтобы выполнялись неравенства: $(x_k \leq \tilde{x}_k \leq x_{k+1})$ и $(y_l \leq \tilde{y}_l \leq y_{l+1})$.

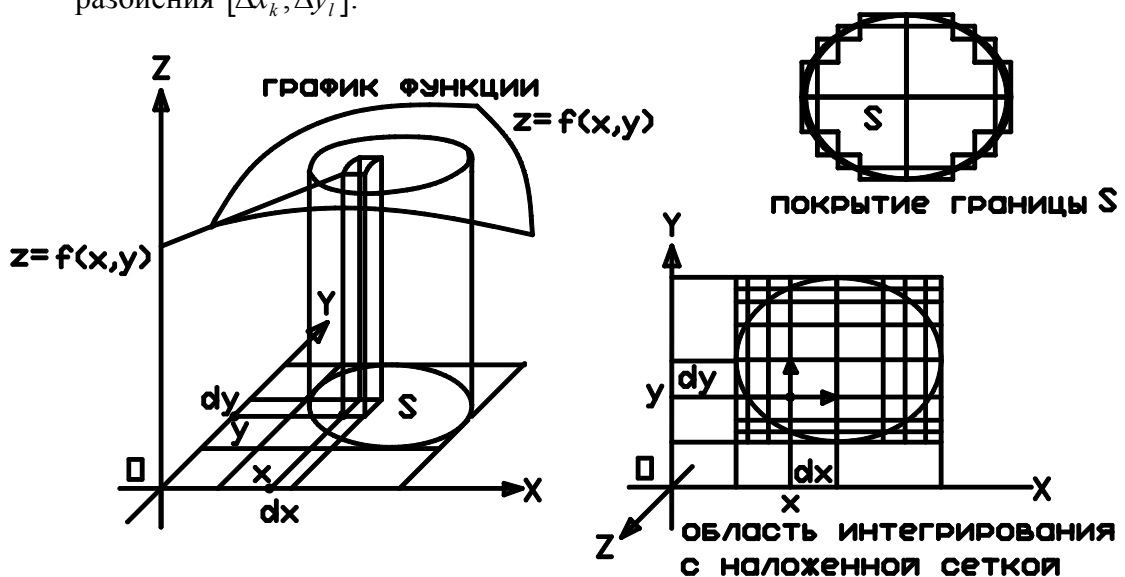
3. Вычисляем интегральную сумму: $\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{f}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) \Delta x_k \Delta y_l$. Здесь

$\tilde{f}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) = f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$, если элемент разбиения имеет с областью интегрирования S непустое пересечение и $\tilde{f}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) = 0$ в противном случае. Кроме того, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и $\Delta y_l = y_{l+1} - y_l$. На самом деле в данном случае интересующий нас цилиндр, объём которого мы ищем, заменяется на некоторую ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольных столбиков – прямоугольных призм. При этом основание каждого столбика есть элемент разбиения $[\Delta x_k, \Delta y_l]$, а высота столбика – есть $\tilde{f}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$, то есть, грубо говоря, расстояние от плоскости XOY до графика подинтегральной функции $z = f(x, y)$ вдоль прямой, параметрическое уравнение которой имеет вид:
$$\begin{cases} x = \tilde{x}_k \\ y = \tilde{y}_l \\ z = t \end{cases}$$
 Интегральная сумма есть объём этой ступенчатой фигуры,

который при достаточно мелком разбиении области интегрирования можно считать приближённо равным ориентированному объёму.

4. Определим мелкость разбиения ρ как максимальную длину сторон элементов разбиения $\Delta x_k, \Delta y_l$ по всем точкам разбиения, то есть по всем k и l . Тогда, очевидно, двойной интеграл $\iint_{(S)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ как

ориентированный объём кривоповерхностного цилиндра следует определить как предел интегральных сумм при мелкости разбиения, стремящейся к нулю. Для того, чтобы указанное определение было корректным, этот предел не должен зависеть (а) от выбора точек разбиения и (б) от выбора точек (аргументов) вычисления подинтегральной функции $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l)$ внутри элемента разбиения $[\Delta x_k, \Delta y_l]$.



§ 4 Достаточные условия существования двойного интеграла.

Эти условия следующие: (1) непрерывность подинтегральной функции на области интегрирования, (2) компактность области интегрирования, то есть её ограниченность и замкнутость относительно операции предела и (3) измеримость области интегрирования, то есть возможность покрытия границы этой области многоугольником сколь угодно малой площади. При выполнении этих условий предел интегральных сумм существует и не зависит от выбора точек (сетки) разбиения области интегрирования и выбора точек – аргументов подинтегральной функции внутри элементов разбиения. Рассмотрим эти условия более подробно.

1. Непрерывность функции есть коммутативность (перестановочность) оператора предела и оператора функции. Иначе говоря, непрерывность означает, что предел от функции равен функции от пределов. Попросту:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x, \lim_{y \rightarrow y_0} y\right).$$

2. Ограниченность области интегрирования означает, что вся она может быть помещена внутрь круга достаточно большого радиуса. Замкнутость области интегрирования означает, что коль скоро все элементы сходящейся (то есть имеющей предел) последовательности точек принадлежат области интегрирования, предел этой последовательности также должен принадлежать области интегрирования.
3. Измеримость области интегрирования, грубо говоря, означает, что площадь границы этой области равна нулю или, точнее говоря, имеет меру нуль. Здесь следует уточнить, что допускается покрытие границы области интегрирования многоугольником сколь угодно малой площади с конечным числом сторон (мера Жордана). В противном случае нам придётся признать, что двумерная функция Дирихле, равная нулю в точках, обе координаты которых иррациональны и равная единице в противном случае, имеет двойной интеграл (например, по области единичного квадрата) равный нулю (интеграл Лебега или интеграл по мере Лебега). Имеется в виду тот факт, что все точки, хотя бы одна координата которых рациональна, могут быть покрыты полосами сколь угодно малой суммарной площади (используется свойство счётности рациональных чисел, подробнее об этом ниже).

§ 5 Основные свойства кратных интегралов.

Эти свойства, в основном, аналогичны свойствам обыкновенных однократных определённых интегралов.

Свойство 1. Кратный интеграл есть линейная функция относительно своего подинтегрального выражения:

$$\iint_{(S)} (k_1 \cdot f_1(x, y) + k_2 \cdot f_2(x, y)) dx dy = k_1 \iint_{(S)} f_1(x, y) dx dy + k_2 \iint_{(S)} f_2(x, y) dx dy.$$

В частности, интеграл от суммы равен сумме интегралов, а постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Свойство 2. Кратный интеграл есть (в некотором смысле) также линейная функция и от своей области интегрирования. Именно: если $S_1 + S_2$ есть объединение областей интегрирования S_1 и S_2 , а $S_1 \cdot S_2$ - их пересечение (общая часть), то:
$$\iint_{(S_1+S_2)} f(x,y) dx dy = \iint_{(S_1)} f(x,y) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x,y) dx dy - \iint_{(S_1 \cdot S_2)} f(x,y) dx dy.$$

В частности, если пересечение двух множеств имеет меру нуль, то есть может быть покрыто многоугольником сколь угодно малой площади, то:

$$\iint_{(S_1+S_2)} f(x,y) dx dy = \iint_{(S_1)} f(x,y) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x,y) dx dy.$$

Это свойство напоминает линейность интеграла но уже относительно области интегрирования (в топологии область (цепь) можно также умножать и на целочисленный коэффициент).

Свойство 3. Если $dx dy > 0$, то есть ориентация области совпадает с ориентацией осей OX и OY , то неравенство можно интегрировать:

$$(f_1(x,y) \geq f_2(x,y)) \Rightarrow \left(\iint_{(S)} f_1(x,y) dx dy \geq \iint_{(S)} f_2(x,y) dx dy \right).$$

Свойство 4. Модуль интеграла не превышает интеграла от модуля:

$$\left| \iint_{(S)} f(x,y) dx dy \right| \leq \iint_{(S)} |f(x,y)| dx dy.$$

Это свойство вытекает из аналогичного свойства для (интегральных) сумм.

Свойство 5 (теорема о среднем). Если выполнены достаточные условия теоремы существования двойного интеграла ($f(x,y)$ непрерывна на замкнутой и ограниченной области S), то внутри области интегрирования S найдётся такая точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$, что справедливо равенство:

$$\iint_{(S)} f(x,y) dx dy = \iint_{(S)} f(\tilde{x}, \tilde{y}) dx dy = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \iint_{(S)} dx dy = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot S.$$

Приведём краткое доказательство этой теоремы.

Теорема вытекает из известного факта о том, что непрерывная функция $f(x,y)$ на компактном множестве S достигает любого значения между максимумом и минимумом этой функции на S . Далее, по теореме об интегрировании неравенств (при $dx dy < 0$ неравенства меняются на противоположные) видно, что:

$$(\min(f) \leq f(x,y) \leq \max(f)) \Rightarrow \left(\iint_S \min(f) dx dy \leq \iint_S f(x,y) dx dy \leq \iint_S \max(f) dx dy \right).$$

Деля двойное неравенство в правой части на S , получаем:

$$\frac{1}{S} \iint_S \min(f) dx dy = \min(f) \leq \frac{1}{S} \iint_S f(x,y) dx dy \leq \frac{1}{S} \iint_S \max(f) dx dy = \max(f).$$

Так как $\frac{1}{S} \iint_S f(x,y) dx dy$ есть значение между максимумом и минимумом

$f(x,y)$, то найдётся такая точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ внутри S , что:

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{S} \iint_S f(x,y) dx dy.$$

Умножая последнее равенство на S , получаем то, что требовалось доказать.

§ 6 Сведение двойного интеграла к повторному.

Теорема (о вычислении двойного интеграла). Если область интегрирования имеет вид: $S: ((a \leq x \leq b); (\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)))$, где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - непрерывные функции, и $f(x, y)$ непрерывна на S , то справедливо равенство:

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Доказательство. Делаем разбиение двойного интеграла такое же, как в определении

двойного интеграла. Введём обозначение: $\Phi(x) = \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y) dy$. Разбиваем интеграл в

правой части равенства теоремы в соответствии с разбиением сегмента

$$[a, b]: \int_{x=a}^{x=b} \Phi(x) dx = \sum_{k=0}^{k=m-1} \int_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} \Phi(x) dx = \sum_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} \Phi(\tilde{x}_k) \Delta x_k. \text{ Здесь мы воспользовались теоремой}$$

о среднем для обычного определённого интеграла и обозначением: $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Далее, для заданного разбиения сегмента $[\min \varphi_1(x), \max \varphi_2(x)]$ вдоль оси OY видно,

$$\text{что: } \Phi(\tilde{x}_k) = \int_{y=\varphi_1(\tilde{x}_k)}^{y=\varphi_2(\tilde{x}_k)} f(\tilde{x}_k, y) dy = \sum_{l=0}^{l=n-1} \int_{y=y_l}^{y=y_{l+1}} \tilde{f}(\tilde{x}_k, y) dy = \sum_{l=0}^{l=n-1} \tilde{f}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) \Delta y_l.$$

В последнем равенстве мы опять воспользовались теоремой о среднем. Здесь

$\Delta y_l = y_{l+1} - y_l$. Функция $\tilde{f}(x, y)$ совпадает с $f(x, y)$, если $(x, y) \in S$ и равна нулю в

противном случае. Подставляя $\sum_{l=0}^{l=n-1} \tilde{f}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) \Delta y_l$ в выражение для повторного интеграла

(правая часть равенства теоремы): $\sum_{x=x_k}^{x=x_{k+1}} \Phi(\tilde{x}_k) \Delta x_k$, получаем, что значение повторного

интеграла есть разновидность интегральной суммы $\sum_{k=0}^{k=m-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) \Delta x_k \Delta y_l$ для двойного

интеграла левой части равенства теоремы. Поскольку достаточные условия существования двойного интеграла в данном случае выполнены, выражение

$\sum_{k=0}^{k=m-1} \sum_{l=0}^{l=n-1} f(\tilde{x}_k, \tilde{y}_l) \Delta x_k \Delta y_l$ сколь угодно мало отличается от двойного интеграла, то есть

просто равно ему, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема даёт возможность вычислять двойные интегралы, сводя их к повторным интегралам.

Пример вычисления двойного интеграла. Требуется вычислить объём верхней половины шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$; $z \geq 0$; радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Из геометрических соображений видно, что параметры повторного интеграла следующие:

$$a = -R; \quad b = +R; \quad \varphi_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}; \quad \varphi_2(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}; \quad z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Отсюда получаем: $\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \frac{V_{шара}}{2} = \int_{x=-R}^{x=R} \left(\int_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=+\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{(R^2-x^2)-y^2} dy \right) dx$.

Обозначим $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ и сделаем замену во внутреннем определённом интеграле:

$y = r \cdot \sin(\varphi)$, $\varphi = \arcsin\left(\frac{y}{r}\right)$. Вычисляем значение внутреннего интеграла:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_{\varphi=\arcsin\left(\frac{-r}{r}\right)}^{\varphi=\arcsin\left(\frac{+r}{r}\right)} \sqrt{r^2 - (r \cdot \sin(\varphi))^2} \frac{d(r \cdot \sin(\varphi))}{d\varphi} d\varphi = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=+\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos^2(\varphi) d\varphi = r^2 \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=+\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} d\varphi = \\ &= \frac{r^2}{2} \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\varphi) \frac{d(2\varphi)}{2} \right) = \frac{r^2}{2} \left(\varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{r^2}{2} \left(\left(+\frac{\pi}{2} \right) - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + 0 \right) = \pi \frac{r^2}{2} \end{aligned}$$

Далее, подставляем вычисленное значение внутреннего интеграла во внешний интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{V_{шара}}{2} &= \int_{x=-R}^{x=R} \left(\pi \frac{R^2 - x^2}{2} \right) dx = \frac{\pi}{2} \left(R^2 \int_{-R}^{+R} dx - \int_{-R}^{+R} x^2 dx \right) = \frac{\pi}{2} \left(R^2 x \Big|_{-R}^{+R} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^{+R} \right) = \frac{\pi}{2} \left(R^2 (R - (-R)) - \frac{R^3 - (-R)^3}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \pi \cdot R^3. \end{aligned}$$

Отсюда получаем известную формулу для вычисления объёма шара: $V_{шара} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

§ 7 Замена переменных в кратном интеграле.

1. Внешнее произведение дифференциальных форм.

Определение. Внешней дифференциальной формой первого порядка от нескольких переменных называется линейная комбинация дифференциалов с коэффициентами при них – функциями этих переменных.

Пример. Пусть в пространстве имеется силовое поле, заданное в векторном виде: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, где $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ – вектор силы в точке $\vec{r}$, а $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор точки пространства. Тогда дифференциал работы по перемещению материальной точки в силовом поле на бесконечно-малое расстояние

$\vec{dr} = (dx, dy, dz)$ есть скалярное произведение силы: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$ на путь: $\vec{dr}$ и может быть представлен в виде дифференциальной формы первого порядка следующим образом:

$$dA = |\vec{F}| \cdot |\vec{dr}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}, \vec{dr})) = (\vec{F} \cdot \vec{dr}) = (F_x, F_y, F_z) \cdot (dx, dy, dz) = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

Определение. Внешнее произведение двух дифференциальных форм первого порядка на параметризованной поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ определяется следующим образом: $\omega_2 = \omega_1^{(1)} \wedge \omega_1^{(2)}$ есть функция (функционал), который на паре дифференциалов (du, dv) принимает числовое значение

следующего определителя: $(\omega_1^{(1)} \wedge \omega_1^{(2)})(du, dv) = \begin{vmatrix} \omega_1^{(1)}(du) & \omega_1^{(2)}(du) \\ \omega_1^{(1)}(dv) & \omega_1^{(2)}(dv) \end{vmatrix}$. Здесь:

$$\omega_1^{(k)}(du) = F_x^{(k)} \frac{\partial x}{\partial u} du + F_y^{(k)} \frac{\partial y}{\partial u} du \quad (k=1,2); \quad \omega_1^{(k)}(dv) = F_x^{(k)} \frac{\partial x}{\partial v} dv + F_y^{(k)} \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (k=1,2).$$

Определение. Внешняя форма второго порядка есть линейная комбинация внешних произведений дифференциальных форм первого порядка с коэффициентами – функциями координат (x, y, z) параметризованной поверхности: S :

$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. Итак, внешняя форма второго порядка полностью определяется своими коэффициентами, внешними произведениями форм первого порядка и параметризованной поверхностью.

Пример. Если в пространстве в каждой его точке $\vec{r} = (x, y, z)$ задано поле скоростей движения жидкости $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$, то

дифференциальная форма: $\omega_2 = v_x \cdot dy \wedge dz + v_y \cdot dz \wedge dx + v_z \cdot dx \wedge dy$ задаёт

количество (объём) жидкости $\frac{dV}{dt}$, проходящей в единицу времени через

бесконечно-малую площадку $\vec{dS} = \vec{dr}(du) \times \vec{dr}(dv)$ параметризованной поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{dS}) = \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ dx(du) & dy(du) & dz(du) \\ dx(dv) & dy(dv) & dz(dv) \end{vmatrix} = (v_x \cdot dy \wedge dz + v_y \cdot dz \wedge dx + v_z \cdot dx \wedge dy)(du, dv).$$

Вторая строка определителя есть вектор бесконечно-малого перемещения вдоль

поверхности S : $\vec{dr}(du) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot du$ (при изменении параметра u : $u \rightarrow u + du$ и неизменном параметре v).

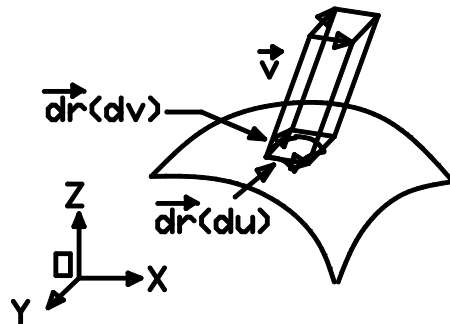
Аналогично, третья строка определителя есть вектор

бесконечно-малого перемещения вдоль поверхности S : $\vec{dr}(dv) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot dv$ (при

изменении параметра v : $v \rightarrow v + dv$ и неизменном параметре u).

Как принято в физике, $\vec{dS} = \vec{dr}(du) \times \vec{dr}(dv)$ есть векторное произведение этих векторов, равное по модулю площади этой площадки (параллелограмма, натянутого на эти вектора).

Внешняя дифференциальная форма в правой части равенства определяется разложением определителя средней части двойного равенства по верхней строке.



2. Замена переменных в двойном интеграле.

Теорема (о замене переменных в двойном интеграле).

Пусть $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ - функции, непрерывные вместе со своими первыми частными

производными по u и по v в некоторой области параметров $S(u, v)$ (на плоскости переменных u и v). При этом предполагается, что $S(u, v)$ имеет вид, указанный в теореме о сведении двойного интеграла к повторному. Пусть область $S(u, v)$

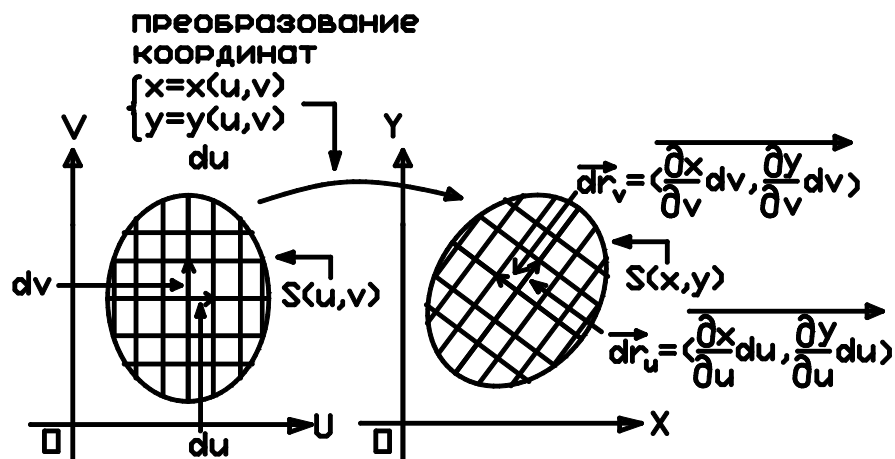
преобразованием $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$ преобразуется в область $S(x, y)$ на плоскости

переменных x и y . Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна по своим переменным в области $S(x, y)$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\iint_{S(x, y)} f(x, y) dx dy = \iint_{S(u, v)} f(x(u, v), y(u, v)) \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} du dv.$$

Определитель в правой части равенства называется определителем Якоби или якобианом. Геометрический смысл последнего равенства состоит в том, что двойной интеграл в правой части равенства есть предел интегральных сумм разбиения области $S(u, v)$ интегрирования по прямоугольной сетке, а интеграл в левой части равенства есть предел интегральных сумм разбиения области $S(x, y)$ интегрирования по криволинейной сетке, получаемой из прямоугольной

преобразованием $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$. Выражение: $\det(\vec{dr}_u, \vec{dr}_v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} du dv$ есть площадь бесконечно-малого элемента разбиения криволинейной сетки (см. рисунок).



Не вдаваясь в подробности доказательства теоремы, заметим, что интегральную сумму правой части равенства по криволинейной сетке можно со сколь угодно высокой точностью представить суммой того же интеграла, но по обычной прямоугольной сетке, параллельной осям координат. Фактически нужно доказать, что сама криволинейная (гладкая, дифференцируемая) сетка имеет меру нуль. Последнее вытекает из того, что график любой непрерывной (а, тем более, дифференцируемой) функции имеет меру нуль в силу существования интеграла Римана от непрерывной функции.

Следует заметить, что подинтегральное выражение интеграла: $\iint_{S(x,y)} f(x,y) dx dy$

можно рассматривать как внешнюю дифференциальную форму второго порядка вида: $\omega_2 = f(x,y) dx \wedge dy$. В этом случае теорема о замене переменных в двойном интеграле становится формально очевидной, поскольку в силу линейности и антисимметричности внешнего произведения дифференциальных форм первого порядка (так же, как и у определителей и произведений Грассмана) видно, что:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= (x'_u du + x'_v dv) \wedge (y'_u du + y'_v dv) = x'_u y'_u (du \wedge du) + x'_u y'_v (du \wedge dv) + x'_v y'_u (dv \wedge du) + x'_v y'_v (dv \wedge dv) = \\ &= 0 + x'_u y'_v (du \wedge dv) + x'_v y'_u (- (du \wedge dv)) + 0 = (x'_u y'_v - x'_v y'_u) (du \wedge dv) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} du dv, \text{ что и} \end{aligned}$$

утверждалось.

Пример. Вычислим объём полушара с помощью преобразования декартовых координат в полярные. Область полушара представим как область, ограниченную плоскостью $z = 0$ (плоскость XOY) и графиком функции полусферы радиуса R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ или: $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$.

Формулы преобразования из декартовых координат (x, y) в полярные координаты

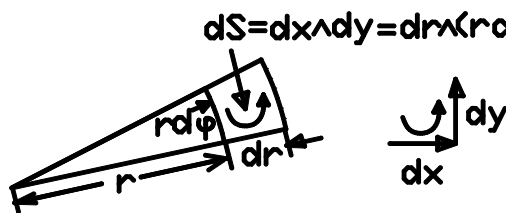
(r, φ) имеют вид: $\begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases}$. Сравнивая формулы преобразования с теорией, видим,

что: $u = r$; $v = \varphi$.

Вычислим элемент площади в полярных координатах:

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} dr \wedge d\varphi = \begin{vmatrix} (r \cos(\varphi))'_r & (r \sin(\varphi))'_r \\ (r \cos(\varphi))'_\varphi & (r \sin(\varphi))'_\varphi \end{vmatrix} dr \wedge d\varphi = \begin{vmatrix} 1 \cdot \cos(\varphi) & 1 \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot (-\sin(\varphi)) & r \cos(\varphi) \end{vmatrix} dr \wedge d\varphi = \\ &= r(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) dr \wedge d\varphi = r \cdot dr \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Геометрический смысл этой формулы ясен из следующего рисунка.



Положительность якобиана следует из сохранения ориентации элемента площади (смотри рисунок).

Итак, вычисляем объём полушара:

$$\frac{V_{\text{шара}}}{2} = \iint_{S(x,y)} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx \wedge dy = \iint_{S(r,\varphi)} \sqrt{R^2 - r^2} dr \wedge (r d\varphi) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} \sqrt{R^2 - r^2} r dr \right) d\varphi$$

Поскольку внутренний интеграл от φ не зависит, его можно вынести за знак внешнего интеграла как константу (постоянную):

$$\frac{V_{\text{шара}}}{2} = \left(\int_{r=0}^{r=R} \sqrt{R^2 - r^2} r dr \right) \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi = \left(\int_{r=0}^{r=R} \sqrt{R^2 - r^2} (d \int_{r=0}^{r=R} r dr) \right) \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \right) =$$

$$= \left(\int (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) d(R^2 - r^2) \Big|_{r=0}^{r=R} \right) (2\pi - 0) = \left(+\frac{1}{2} \right) \frac{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_{r=R}^{r=0} \cdot 2\pi = \left(\frac{2}{3} \right) \pi R^3.$$

Отсюда получаем известную формулу для объёма шара: $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3$.

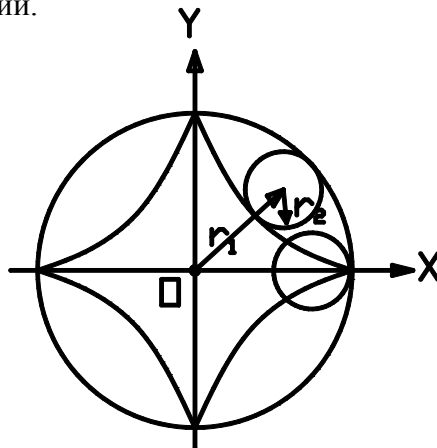
Менее тривиальный пример замены переменных в двойном интеграле даёт следующая

задача: вычислить площадь внутри астроида: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$.

Указание: выполнить замену переменных $\begin{cases} x = r \cdot \cos^3(\varphi) \\ y = r \cdot \sin^3(\varphi) \end{cases}$. Область интегрирования в

астроидальных координатах определяется так: $S(r, \varphi): \begin{cases} (0 \leq r \leq R) \\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{cases}$.

Примечание. Фигура астроида имеет вид, похожий на фигуру бубновой масти и представляет собой траекторию точки окружности радиуса $\frac{R}{4}$, катящейся внутри окружности радиуса R . Читателю рекомендуется проверить этот факт методами аналитической геометрии.



Вывод параметрического уравнения астроида.

$$\vec{r}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \left(\frac{3}{4} r \cdot \cos(\varphi), \frac{3}{4} r \cdot \sin(\varphi) \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \cos(\varphi - 4\varphi), \frac{1}{4} \cdot \sin(\varphi - 4\varphi) \right).$$

Косинус и синус тройного угла вычисляем по формулам Муавра – Лапласа:

$$(\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi)) = (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^3 = \cos^3(\varphi) + 3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) \cdot i + 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) \cdot i^2 + \sin^3(\varphi) \cdot i^3$$

Приравнявая действительные и мнимые части этого равенства, получаем:

$$\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)(1 - \cos^2(\varphi)) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi) \text{ и}$$

$$\sin(3\varphi) = 3(1 - \sin^2(\varphi))\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi).$$

Отсюда:

$$x = \frac{r}{4}(3\cos(\varphi) + \cos(3\varphi)) = \frac{r}{4}(3\cos(\varphi) + 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)) = r\cos^3(\varphi) \text{ и}$$

$$y = \frac{r}{4}(3\sin(\varphi) - \sin(3\varphi)) = \frac{r}{4}(3\sin(\varphi) - (3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi))) = r\sin^3(\varphi).$$

Приводим вычисление площади астроида, выполненное на языке Maple ([Maple]).

> with(LinearAlgebra):

```

x:=r*cos(f)^3;y:=r*sin(f)^3;iak:=<<diff(x,r) | diff(y,r)>,
<diff(x,f) | diff(y,f)>>;det:=Determinant(iak);
det:=simplify(det);Int(Int(det,r=0..R),f=0..2*Pi)=int(int(det,
r=0..R),f=0..2*Pi);

```

$$\begin{aligned}
 x &:= r \cos(f)^3 \\
 y &:= r \sin(f)^3 \\
 iak &:= \begin{bmatrix} \cos(f)^3 & \sin(f)^3 \\ -3r \cos(f)^2 \sin(f) & 3r \sin(f)^2 \cos(f) \end{bmatrix} \\
 det &:= 3 \cos(f)^4 r \sin(f)^2 + 3 \sin(f)^4 r \cos(f)^2 \\
 det &:= 3 r \cos(f)^2 \sin(f)^2 \\
 \int_0^{2\pi} \int_0^R 3 r \cos(f)^2 \sin(f)^2 dr df &= \frac{3}{8} R^2 \pi
 \end{aligned}$$

>

§ 8 Поверхностные интегралы первого рода.

Пусть имеется параметрическое уравнение поверхности $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ или, в скалярном виде: $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$, где $\vec{r} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$, $\vec{r}(u, v) = \begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{cases}$. Тогда площадь бесконечно-

малого элемента криволинейной сетки $|\vec{dS}|$ определяется модулем векторного

произведения: $\vec{dS} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \cdot du \cdot dv$ векторных дифференциалов

сетки участка поверхности $S(x, y, z)$, получаемых из векторов $(du, 0)$, $(0, dv)$ элемента прямоугольной сетки плоского участка $S(u, v)$ преобразованием $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$.

Определение поверхностного интеграла первого рода дадим на модельной задаче определения массы участка поверхности $S(x, y, z)$, если в каждой точке этого

участка дана его поверхностная плотность $\frac{dm}{d|\vec{S}|} = \rho(x, y, z)$. Тогда значение массы

участка $S(x, y, z)$ даётся значением поверхностного интеграла первого рода общего вида, где подинтегральная функция есть поверхностная плотность поверхности:

$$M(S) = \iint_{S(x,y,z)} dm = \iint_{S(x,y,z)} \frac{dm}{d|\vec{S}|} d|\vec{S}| = \iint_{S(x,y,z)} \rho(x, y, z) d|\vec{S}| = \iint_{S(x,y,z)} \rho(x, y, z) \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \right| du \cdot dv.$$

Здесь $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ тройка единичных декартовых векторов (ортов), направленных вдоль осей декартовой системы координат.

Разлагая определитель в интеграле по верхней строке и, беря модуль полученного вектора, получаем формулу для поверхностного интеграла первого рода в скалярном виде:

$$M(S) = \iint_{S(x,y,z)} \rho(x, y, z) \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}^2} du \cdot dv.$$

Заметим, что с помощью подобного рода интегралов удобно получать также центры тяжести и моменты инерции поверхностей в пространстве.

Задача. Найти поверхность тела вращения плоской кривой, заданной в плоскости XOZ уравнением $z = f(x)$ и получаемого вращением этой кривой вокруг оси OZ .

Решение. Нетрудно видеть, что параметрическое уравнение этого тела вращения имеет

$$\text{вид: } \begin{cases} x = r \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\varphi) \\ z = f(r) \end{cases} \quad \text{Здесь } \begin{cases} r = u \\ \varphi = v \end{cases}.$$

Элемент поверхности этого тела вращения примет вид:

$$|\vec{dS}| = \sqrt{\begin{vmatrix} (r \cdot \sin(\varphi))'_r & (f(r))'_r \\ (r \cdot \sin(\varphi))'_\varphi & 0 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} (r \cdot \cos(\varphi))'_r & (f(r))'_r \\ (r \cdot \cos(\varphi))'_\varphi & 0 \end{vmatrix}}^2 + \begin{vmatrix} (r \cdot \cos(\varphi))'_r & (r \cdot \sin(\varphi))'_r \\ (r \cdot \cos(\varphi))'_\varphi & (r \cdot \sin(\varphi))'_\varphi \end{vmatrix}}^2 dr \cdot d\varphi.$$

Раскрывая определители, получаем:

$$|\vec{dS}| = \sqrt{(f'(r))^2 r^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + r^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))} dr \cdot d\varphi = \sqrt{(f'_r)^2 + 1} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi.$$

Итак, искомая площадь поверхности даётся формулой:

$$S = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} \sqrt{(f'_r)^2 + 1} \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\varphi, \text{ предполагая, что: } S(r, \varphi): \begin{cases} (0 \leq r \leq R) \\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{cases}.$$

Задача. Найти площадь поверхности полусферы радиуса R .

Решение. Воспользуемся решением предыдущей задачи. В данном случае имеем вращение четверти окружности радиуса R , уравнение которой имеет вид:

$z = f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$. Отсюда: $f'(r) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}} \cdot (-2r \cdot dr)$ Тогда, используя решение

предыдущей задачи, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\text{сферы}}}{2} &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=R} \sqrt{\frac{r^2}{R^2 - r^2}} + 1 \cdot r \cdot dr \right) \cdot d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \left(\int_{r=0}^{r=R} \frac{R \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d(R^2 - r^2)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot dr \right) = \\ &= 2\pi R \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{z=R^2-0^2}^{z=R^2-R^2} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\pi R \left(+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) \Big|_{z=0}^{z=R^2} = 2\pi R \cdot R = 2\pi R^2 = \frac{S_{\text{сферы}}}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем известную формулу для вычисления площади сферы:

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2.$$

§ 9 Поверхностные интегралы второго рода и их физический смысл.

Определение. Поверхностные интегралы второго рода (в трёхмерном евклидовом пространстве) суть интегралы от внешних дифференциальных форм второго порядка ω_2 по участку поверхности $S_2(x, y, z)$:

$$\iint_{S_2(x, y, z)} \omega_2(x, y, z, dx, dy, dz).$$

Пример. Дадим формулу для вычисления установившегося, (то есть не зависящего от времени) потока жидкости через участок поверхности $S_2(x, y, z)$. Под потоком понимается количество (объём) жидкости протекающее через заданный участок поверхности в единицу времени. Поле скоростей жидкости задаётся векторным

уравнением $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, эквивалентным трём скалярным уравнениям:
$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z) \\ v_y = v_y(x, y, z) \\ v_z = v_z(x, y, z) \end{cases}$$

Здесь: $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Объём жидкости, протекающий через бесконечно-

малую площадку $\vec{dS} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \right)$ (смотри выше пример использования

дифференциальной формы), есть объём параллелепипеда, натянутый на тройку

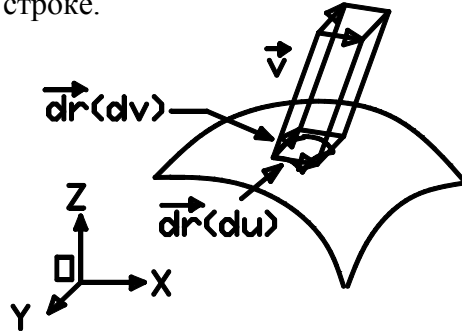
векторов: $\left(\vec{v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \right)$, то есть:

$$\frac{dV_{\text{жидкости}}}{dt} = \iint_{S(u, v)} \begin{vmatrix} v_x & v_y & v_z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \cdot (du \wedge dv) = \iint_{S(x, y, z)} (v_x \cdot dy \wedge dz + v_y \cdot dz \wedge dx + v_z \cdot dx \wedge dy) = \iint_{S(x, y, z)} \omega_2.$$

Напомним, что внешнее произведение двух дифференциальных форм на паре дифференциалов (du, dv) принимает значение определителя, например:

$$(du \wedge dv)(du, dv) = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} (du \wedge dv). \text{ Из формулы потока жидкости видно, что}$$

дифференциальная форма ω_2 есть не что иное, как разложение определителя третьего порядка по верхней строке.



§ 10 Теорема Пуанкаре и её использование при вычислении поверхностных интегралов второго рода.

Этот замечательный результат А. Пуанкаре будем использовать, прежде всего, как мнемоническое правило для формулировок целого ряда теорем, поэтому формулируем теорему Пуанкаре в её наиболее абстрактном виде.

Итак, теорема Лейбница – Ньютона – Грина – Стокса – Остроградского – Гаусса-

Пуанкаре имеет вид:

$$\oint_{D(V_{n+1})} \omega_n = \iiint_{V_{n+1}} D \wedge \omega_n.$$

Комментарии (пояснения) к теореме.

1. Объём V_{n+1} есть $n+1$ -мерная ограниченная область в пространстве той же размерности. Ограниченность следует понимать как ограниченность расстояния между любыми двумя точками, расположенными внутри области, то есть эти расстояния не могут превышать некоторого заданного числа.
2. Далее, $D(V_{n+1})$ есть топологическая граница этой области – поверхность размерности n . Граница понимается с тем смысле, что любой $n+1$ -мерный шар с центром в точке границы содержит внутри себя как точки, принадлежащие области, так и точки, не принадлежащие к ней. В то же время для внутренних и внешних точек области существуют шары, содержащие только внутренние или только внешние точки области.
3. В левой части равенства имеем n -кратный интеграл. Кружок на символе двойного интеграла означает, что у самой границы отсутствует граница. Иначе говоря, $D(D(S_{n+1})) = 0$ известный топологический факт.
4. Дифференциальный оператор D имеет вид:

$$D = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m,$$
 причём объём V_{n+1} погружен в пространство $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ размерности $m \geq n+1$.

5. Внешнее произведение $D \wedge \omega_n$ обладает свойствами произведения Грассмана, а именно: линейностью и антикоммутативностью.

Более подробно смысл теоремы будет ясен из дальнейшего изложения материала. Рассмотрим теперь частные случаи теоремы Пуанкаре.

1. Теорема (формула) Грина.

Здесь $n = 1$, $m = 2$, $V_{n+1} = S_2$, $D = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$,

$$\omega_n = \omega_1 = Pdx + Qdy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем: } \oint_{D(S_2)} (Pdx + Qdy) &= \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) \wedge (Pdx + Qdy) = \\ &= \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} (dx \wedge dx) + \frac{\partial Q}{\partial x} (dx \wedge dy) + \frac{\partial P}{\partial y} (dy \wedge dx) + \frac{\partial Q}{\partial y} (dy \wedge dy) \right) = \\ &= \iint_{(S_2)} \left(0 + \frac{\partial Q}{\partial x} (dx \wedge dy) + \frac{\partial P}{\partial y} (-dx \wedge dy) + 0 \right) = \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (dx \wedge dy). \end{aligned}$$

$$\text{Итак: } \oint_{D(S_2)} (Pdx + Qdy) = \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (dx \wedge dy) \text{ - формула Грина.}$$

2. Теорема (формула) Стокса.

Здесь $n = 1$, $m = 3$, $V_{n+1} = S_2$, $D = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz$,

$$\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{D(S_2)} (Pdx + Qdy + Rdz) &= \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \wedge (Pdx + Qdy + Rdz) = \\ &= \iint_{(S_2)} \left(0 + \frac{\partial Q}{\partial x} (dx \wedge dy) + \frac{\partial R}{\partial x} (dx \wedge dz) + \frac{\partial P}{\partial y} (dy \wedge dx) + 0 + \frac{\partial R}{\partial y} (dy \wedge dz) \right) + \\ &+ \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial P}{\partial z} (dz \wedge dx) + \frac{\partial Q}{\partial z} (dz \wedge dy) + 0 \right) = \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} (dx \wedge dy) + \frac{\partial R}{\partial x} (-dz \wedge dx) \right) + \\ &+ \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} (-dx \wedge dy) + \frac{\partial R}{\partial y} (dy \wedge dz) + \frac{\partial P}{\partial z} (dz \wedge dx) + \frac{\partial Q}{\partial z} (-dy \wedge dz) \right). \end{aligned}$$

Итак: $\oint_{D(S_2)} (Pdx + Qdy + Rdz) =$

$$= \iint_{(S_2)} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) (dy \wedge dz) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) (dz \wedge dx) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) (dx \wedge dy) \right) - \text{формула Стокса.}$$

В векторных обозначениях формула принимает вид: $\oint_{D(S_2)} \vec{A} \cdot \vec{dr} = \iint_{(S_2)} \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \cdot \vec{dS}$

или: $\oint_{D(S_2)} \overrightarrow{rot}(P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = \iint_{(S_2)} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} dudv.$

3. Теорема (формула) Гаусса – Остроградского.

Здесь $n = 2$, $m = 3$, $V_{n+1} = V_3$, $D = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz$,

$$\omega_2 = P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy).$$

Имеем: $\iiint_{D(V_3)} (P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)) =$

$$= \iiint_{V_3} \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right) \wedge (P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)).$$

Проделявая выкладки, аналогичные предыдущим, получаем формулу Гаусса – Остроградского:

$$\iiint_{D(V_3)} (P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)) = \iiint_{V_3} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) (dx \wedge dy \wedge dz).$$

В векторных обозначениях эта теорема принимает вид:

$$\oint_{D(V_3)} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(V_3)} \text{div}(\vec{A}) dV, \text{ где: } \vec{A} = (P, Q, R), \vec{dS} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix},$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right).$$

4. О доказательстве теоремы Пуанкаре.

Нижеследующие рассуждения показывают метод доказательства этой теоремы в частном случае одного слагаемого дифференциальной формы

второго порядка. Рассмотрим выражение $\iiint_{V_3} D \wedge \omega_2$, где

$\omega_2 = f(x, y, z)(dy \wedge dz)$. Тогда подинтегральное выражение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \iiint_{V_3} D \wedge \omega_2 &= \iiint_{V_3} (D \wedge \omega_2) f(du \wedge dv \wedge dw) = \\ &= \iiint_{V_3} \begin{vmatrix} D_u & D_v & D_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} f(du \wedge dv \wedge dw) = \iiint_{V_3} (D_u f(dy \wedge dz)_{vw} + D_v f(dy \wedge dz)_{wu} + D_w f(dy \wedge dz)_{uv}) \end{aligned}$$

Очевидно, в данном случае мы имеем разложение определителя по верхней строке. Примем без доказательства тот факт, что подходящей параметризацией объёма V_3 его поверхность $D(V_3)$ может быть разбита на 6 граней, причём на противоположных гранях один параметр из трёх сохраняет постоянное значение. Пример: раздувание куба в пространстве (u, v, w) до сферы в пространстве (x, y, z) .

Пояснение. Дифференциал $D_u f$ следует понимать как дифференциал (главную линейную часть приращения) вдоль возрастания параметра u :

$$D_u f = \frac{Df}{\partial u} du = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \partial + \frac{\partial f}{\partial y} \partial + \frac{\partial f}{\partial z} \partial \right)}{\partial u} du = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) du.$$

Аналогично расписываются $D_v f$ и $D_w f$.

Выполняя интегрирование в первом слагаемом суммы трёх интегралов:

$$\iiint_{V_3} (D_u f(dy \wedge dz)_{vw} + D_v f(dy \wedge dz)_{wu} + D_w f(dy \wedge dz)_{uv}) \text{ по параметру } u, \text{ во}$$

втором – по v , а в третьем – по w , получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} &\iint_{(u=const)} (f(u_2, v, w) - f(u_1, v, w))(dy \wedge dz)(dv, dw) + \iint_{(v=const)} (f(u, v_2, w) - f(u, v_1, w))(dz \wedge dx)(dw, du) + \\ &+ \iint_{(w=const)} (f(u, v, w_2) - f(u, v, w_1))(dx \wedge dy)(du, dv). \end{aligned}$$

В первом слагаемом последнего выражения интегрирование производится по противоположным граням кривоповерхностного куба в пространстве (x, y, z) , соответствующим граням куба (точнее, параллелепипеда): $u = u_2$ и $u = u_1$ в пространстве (u, v, w) . Аналогичные рассуждения справедливы и для противоположных граней $v = v_2, v = v_1$ и $w = w_2, w = w_1$.

Иногда рассуждения проводятся следующим образом. Строим криволинейную сетку разбиения области интегрирования $V_3(x, y, z)$, соответствующую прямоугольной сетке $V_3(u, v, w)$. Затем тройные интегралы (например, $\iiint_{V_3} (D_u f(dy \wedge dz)_{vw})$) по бесконечно тонким слоям, где один из

параметров (u, v или w) отличается на бесконечно – малую величину, представляем в виде приближённых разностей интегралов по близким поверхностям. Тогда интегралы по внутренним поверхностям криволинейной сетки взаимно уничтожаются и остаются только разности интегралов по криволинейным граням куба в пространстве (x, y, z) , соответствующим граням куба $V_3(u, v, w)$.

Далее, поскольку ориентации по противоположным граням куба противоположны (если смотреть на них извне куба), то для сохранения единой ориентации по всем граням куба, необходимо изменить ориентации и знаки перед функциями на гранях $u = u_1, v = v_1, w = w_1$. Тогда сумма шести слагаемых выражения:

$$\begin{aligned} & \iint_{(u=const)} (f(u_2, v, w) + f(u_1, v, w))(dy \wedge dz)(dv, dw) + \iint_{(v=const)} (f(u, v_2, w) + f(u, v_1, w))(dz \wedge dx)(dw, du) + \\ & + \iint_{(w=const)} (f(u, v, w_2) + f(u, v, w_1))(dx \wedge dy)(du, dv) \end{aligned}$$

превратится в интеграл по всем шести граням куба в пространстве (x, y, z) , то есть в $\oint_{(V_{n+1})} f(dy \wedge dz)$.

Читателю рекомендуется провести аналогичные рассуждения для теорем Грина и Стокса.

5. Теорема Лейбница – Ньютона.

Здесь $n = 0, m = 1, V_{n+1} = L_1, D = \frac{d}{dx} dx$.

$\omega_0 = F(x)$ - форма «нулевого» порядка. Здесь $F(x) \equiv \int f(x) dx$.

Теорема формально выглядит так: $\oint_{D(L_1)} \omega_0 = \int_{L_1} D \wedge \omega_0$ или так:

$$F(b) - F(a) \equiv F(x) \Big|_a^b = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx} dx.$$

Удобно также представить теорему как «перепрыгивание» дифференциала с цепи V_{n+1} на коцепь ω_n , в данном случае: $n = 0$ (пользуемся топологической терминологией):

$$F \overset{b}{\underset{a}{\Downarrow}} \equiv \left(\int d \right) \overset{\leftarrow b}{\underset{\leftarrow a}{F}} \overset{b}{\underset{a}{\Downarrow}} = \int_a^b dF \equiv \int_a^b \frac{dF}{dx} \cdot dx \equiv \int_a^b f(x) \cdot dx.$$

6. Пример использования теоремы Пуанкаре.

Вычислим контурный интеграл $\oint_{D(S_2)} (ydx - xdy)$, где S_2 и $D(S_2)$ - круг, и,

соответственно, окружность радиуса R .

Решение. По теореме Пуанкаре:

$$\begin{aligned} \oint_{D(S_2)} (ydx - xdy) &= \iint_{(S_2)} \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right) \wedge (ydx - xdy) = \\ &= \iint_{(S_2)} \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial y}{\partial y} (-dx \wedge dy) \right) = (-1 - 1) \iint_{(S_2)} dx \wedge dy = (-2) \cdot S_{\text{круга}} = -2\pi R^2. \end{aligned}$$

Проверка. Вычислим контурный интеграл непосредственно параметризацией окружности: $D(S_2): \begin{cases} x = R \cos(\varphi) \\ y = R \sin(\varphi) \end{cases}$.

Имеем:

$$\oint_{D(S_2)} (y dx - x dy) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \left((R \sin(\varphi)) \frac{d(R \cos(\varphi))}{d\varphi} - (R \cos(\varphi)) \frac{d(R \sin(\varphi))}{d\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= R^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} (-(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))) d\varphi = -R^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \stackrel{\varphi=0}{\Downarrow} \stackrel{\varphi=2\pi}{\Uparrow} = -2\pi R^2.$$

§ 11 Пример решения задания по кратным и криволинейным интегралам.

1. Изменить порядок интегрирования $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x; y) dy$.

2. Вычислить $\iint_D x dx dy$, если область D ограничена линиями $y = 0$, $y = x$, $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 9$ ($x > 0$; $y > 0$)

3. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $z = 25$, $z = x^2 + y^2$

4. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{(L)} 2xy dx + x^2 dy$, если линия L задана

уравнением $y = x^2 + 1$, ($0 \leq x \leq 2$).

5. Найти центр тяжести треугольника постоянной плотности, внутренность которого

определяется неравенствами: $S: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1 \end{cases}$.

6. Вычислить интеграл $\iiint_{(S)} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$ по замкнутой

поверхности, образованной гранями тетраэдра, внутренность которого определяется

неравенствами: $V: \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$.

РЕШЕНИЕ:

1). Делаем рисунок области интегрирования. Эта область есть участок между двумя параболami $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$ (правее оси ОУ). Точка пересечения парабол $x = 1; y = 1$. Таким образом область делится на два участка: первый $(0 \leq y \leq 1)$, второй $1 \leq y \leq 2$. На первом участке $y = x^2$, следовательно $x = \sqrt{y}$; на втором участке $y = 2 - x^2$, следовательно $x = \sqrt{2 - y}$. Поэтому интеграл в ответе разбивается на два интеграла.

Ответ:
$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=\sqrt{y}} f dx + \int_{y=1}^{y=2} \int_{x=0}^{x=\sqrt{2-y}} f dx$$

2). Область интегрирования в полярных координатах r, φ , где $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$ имеет вид $2 \leq x^2 + y^2 = r^2 \leq 9$, отсюда $(\sqrt{2} < r < 3)$ по углу φ это есть область между $y = 0, (\varphi = 0)$ и $y = x, (\varphi = \pi/4)$. Элемент площади в полярных координатах есть $dx \wedge dy = r dr \wedge d\varphi$. $x = r \cos \varphi$. Поэтому исходный интеграл имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \int_{r=\sqrt{2}}^{r=3} (r \cos \varphi) (r dr \cdot d\varphi) &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_{r=\sqrt{2}}^{r=3} r^2 dr = \\ &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} \cos \varphi d\varphi \cdot \left. \frac{r^3}{3} \right|_{r=\sqrt{2}}^{r=3} = \sin \varphi \Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}}^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot (3^3 - (\sqrt{2})^3) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{27 - 2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ответ: интеграл равен $\frac{9\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}$.

3). Искомый объём есть объём «бокала» между поверхностью налитой в него воды $z = 25$

$$x = r \cos \varphi$$

и дном бокала $z = x^2 + y^2$. Переходим в цилиндрические координаты $y = r \sin \varphi$,

$$z = z$$

элемент

объёма в цилиндрических координатах имеет вид $dx \wedge dy \wedge dz = r dr d\varphi dz$. Область по (x, y) ограничена окружностью $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25} = 5$. Таким образом, объём описываем неравенствами $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, $(r \leq 0 \leq 5)$ и $((x^2 + y^2 = r^2) \leq z \leq 25)$. Поэтому искомый объём вычисляется так:

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{(v)} dx dy dz = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{r=0}^{r=5} \int_{z=r^2}^{z=25} r dr d\varphi dz = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_{r=0}^{r=5} r dr \int_{z=r^2}^{z=25} dz = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_{r=0}^{r=5} r dr z \Big|_{z=r^2}^{z=25} = 2\pi \int_{r=0}^{r=5} r dr (25 - r^2) = \\
 &= 2\pi \left(25 \cdot \frac{r^{1+1}}{1+1} \Big|_0^5 - \frac{r^{3+1}}{3+1} \Big|_0^5 \right) = 2\pi \left(\frac{625}{2} - \frac{625}{4} \right) = \pi \frac{625}{2}
 \end{aligned}$$

Ответ: $V = \pi \frac{625}{2}$

4). Параметрическое уравнение кривой интегрирования имеет вид $\begin{cases} x = x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$, где

$(0 \leq x \leq 2)$. Поскольку $dy = y'_x dx = (x^2 + 1)'_x x dx = 2x dx$, то искомый интеграл пишется в виде

$$I = \int_{(L)} (2xy dx + x^2 dy) = \int_{x=0}^{x=2} (2x(x^2 + 1) dx + x^2 (2x dx)) = \int_0^2 4x^3 dx + \int_0^2 2x^3 dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} \Big|_0^2 + 2 \frac{x^{1+1}}{1+1} \Big|_0^2 = 2^4 + 2^2 = 20$$

Ответ: $I=20$.

5) Центр тяжести плоской фигуры S определяется по формулам: $x_s = \frac{\iint_{(S)} \rho x dx dy}{\iint_{(S)} \rho dx dy}$,

$$y_s = \frac{\iint_{(S)} \rho y dx dy}{\iint_{(S)} \rho dx dy}. \text{ Здесь } S - \text{ область интегрирования, } \rho = \frac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} - \text{ плотность фигуры.}$$

Поскольку по условию задачи $\rho = const$, её можно вынести за знак интегралов и на неё сократить, так что будем считать, что $\rho = 1$. Так как для диагонали прямоугольного

треугольника S имеем: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, то $y = b \left(1 - \frac{x}{a} \right)$, откуда фигура S определяется

неравенствами: $S : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a} \right) \end{cases}$. Поэтому координата x_s центра тяжести

$$\text{вычисляется следующим образом: } x_s = \frac{\iint_{(S)} x dx dy}{\iint_{(S)} dx dy} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b \left(1 - \frac{x}{a} \right)} x dx dy}{\int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b \left(1 - \frac{x}{a} \right)} dx dy}. \text{ Интеграл в числителе}$$

вычисляется так:

$$\int_{x=0}^{x=a} x dx \int_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \stackrel{\downarrow}{=} \int_{x=0}^{x=a} x dx \left[b\left(1-\frac{x}{a}\right) - 0 \right] = b \int_{x=0}^{x=a} x dx \stackrel{\downarrow}{=} \frac{b}{a} \int_{x=0}^{x=a} x^2 dx \stackrel{\downarrow}{=} b \frac{x^2}{2} \bigg|_{x=0}^{x=a} - \frac{b}{a} \frac{x^3}{3} \bigg|_{x=0}^{x=a} =$$

$$= b \frac{a^2 - 0^2}{2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{a^3 - 0^3}{3} = \frac{b \cdot a^2}{6}. \text{ Интеграл в знаменателе вычисляется так:}$$

$$\int_{x=0}^{x=a} dx b\left(1-\frac{x}{a}\right) = bx \bigg|_0^a - \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_0^a = b(a-0) - \frac{b}{a} \left(\frac{a^2 - 0^2}{2} \right) = \frac{ba}{2} - \text{площадь треугольника.}$$

$$\text{Отсюда: } x_s = \left(\frac{b \cdot a^2}{6} \right) / \left(\frac{ba}{2} \right) = \left(\frac{b \cdot a^2}{6} \right) \cdot \left(\frac{2}{ba} \right) = \frac{a}{3}.$$

Геометрическая проверка. Известно, что центр тяжести треугольника есть точка пересечения трёх его медиан, причём эта точка делит каждую медиану в отношении

$$2/3 : 1/3. \text{ Отсюда искомый центр тяжести равен: } x_s = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a}{3}.$$

Аналогично, координата y_s центра тяжести вычисляется так:

$$y_s = \frac{\iint_{(S)} y dx dy}{\iint_{(S)} dx dy} = \frac{\int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} y dx dy}{\int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx dy} = \frac{1}{\left(\frac{ba}{2} \right)} \int_{x=0}^{x=a} \frac{y^2}{2} \bigg|_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx = \left(\frac{2}{ba} \right) \left(\frac{b^2}{2} \right) \int_0^a dx \left(1^2 - 2 \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right) =$$

$$= \frac{b}{a} \left(a - \frac{2}{a} \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_0^a + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^a \right) = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{3} = \frac{b}{3}. \text{ Геометрическая проверка. } y_s = \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{b}{3}.$$

б) В рассматриваемом интеграле отдельные слагаемые равны между собой, то есть:

$$\oint_{(S)} (x dy \wedge dz) = \oint_{(S)} (y dz \wedge dx) = \oint_{(S)} (z dx \wedge dy), \text{ поскольку каждый интеграл в}$$

двойном равенстве переходит в другой поворотом тетраэдра S вокруг прямой

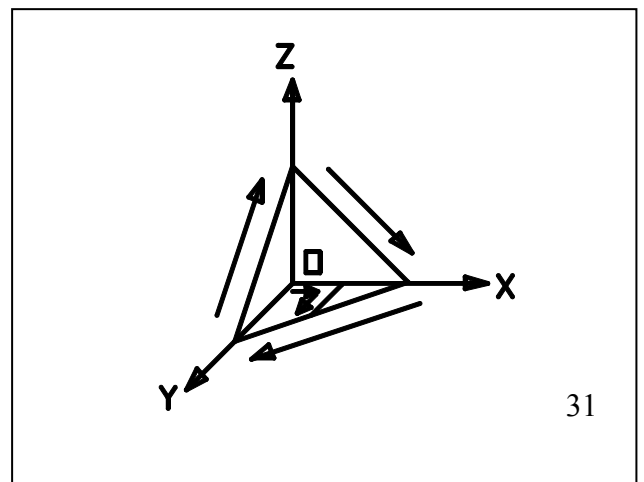
$x = y = z = t$ на угол $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$. Вычислим интеграл $\oint_{(S)} (z dx \wedge dy)$. На каждой грани

тетраэдра, лежащей в координатных плоскостях, слагаемые этого интеграла равны нулю. Например, на грани $x = 0$ будет $dx \wedge dy = 0 \wedge dy = 0$, а на грани $z = 0$ сама

подинтегральная функция равна нулю. Поэтому достаточно вычислить $\oint_{(S)} (z dx \wedge dy)$

лишь по кривой грани $x + y + z = 1$.

Выбираем координатные оси в пространстве в соответствии с левой ориентацией, как показано на рисунке. Тогда, если смотреть на грани тетраэдра изнутри него, то эти грани должны быть ориентированы против часовой стрелки, а если извне его, то по часовой стрелке (смотри рисунок). Этой ориентации



соответствует ориентация области интегрирования (проекция кривой грани на плоскость XOY). Направление вдоль оси OX может быть, в принципе, любым (выбираем его вдоль направления оси OX), но направление вдоль оси OY выбираем же в соответствии с ориентацией, то есть по часовой стрелке. К счастью, в данном случае это есть положительное направление вдоль оси OY . Отсюда вытекает, что нижний предел внешнего интеграла по x есть 0, его верхний предел есть 1, нижний предел внутреннего интеграла по y есть 0, его верхний предел есть $y = 1 - x$ (движение вдоль точек $(0,0) - (0,|x|) - (0,1-|x|)$ есть движение по часовой стрелке). Итак, интеграл вычисляется следующим образом.

$$\begin{aligned} \oint\limits_{(S)} (z \, dx \wedge dy) &= \oint\limits_{(x+y+z=1)} (z \, dx \wedge dy) = \int\limits_{x=0}^{x=1} dx \int\limits_{y=0}^{y=1-x} (1-x-y) dy = \int\limits_{x=0}^{x=1} dx (1-x) \int\limits_{y=0}^{y=1-x} dy \Big|_{y=0}^{y=1-x} - \int\limits_{x=0}^{x=1} dx \int\limits_{y=0}^{y=1-x} y dy \Big|_{y=0}^{y=1-x} = \\ &= \int\limits_{x=0}^{x=1} dx (1-x)^2 - \int\limits_{x=0}^{x=1} dx \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-x} = \int\limits_{x=0}^{x=1} dx (1-x)^2 - \int\limits_{x=0}^{x=1} dx \frac{(1-x)^2}{2} = \int\limits_{x=0}^{x=1} dx \frac{(1-x)^2}{2} = \int\limits_{x=0}^{x=1} (-dz) \frac{(1-x)^2}{2} = \\ &= \int\limits_{z=1-x=1}^{z=1-x=0} (-dz) \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2} \int\limits_{z=0}^{z=1} z^2 dz \Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Учитывая равенства: $\oint\limits_{(S)} (x \, dy \wedge dz) = \oint\limits_{(S)} (y \, dz \wedge dx) = \oint\limits_{(S)} (z \, dx \wedge dy)$, получаем,

что исходный интеграл равен:

$$\oint\limits_{(S)} (x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Проверка. Полученный результат можно также получить с помощью варианта теоремы Пуанкаре в форме Остроградского – Гаусса:

$$\oint\limits_{D(V_3)} (P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)) = \iiint\limits_{V_3} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) (dx \wedge dy \wedge dz). \text{ В данном}$$

случае: $P = x$; $Q = y$; $R = z$. Итак:

$$\oint\limits_{(S=D(V))} (x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy) = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) (dx \wedge dy \wedge dz) = \iiint\limits_{(V)} (1 + 1 + 1) (dx \wedge dy \wedge dz)$$

Иначе говоря, этот интеграл равен утроенному объёму тетраэдра, то есть

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right) \cdot 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

Оглавление части 1.

Кратные и криволинейные интегралы.....	3
Введение.....	3
§ 1 Ориентация.....	4
1. Ориентация в одномерном случае ($n = 1$, где n - размерность пространства).....	4
2. Ориентация в двумерном случае ($n = 2$).....	5
3. Ориентация в трёхмерном случае ($n = 3$).....	6
4. Ориентация в многомерном случае.....	6
§ 2 Ориентированная площадь и ориентированный объём.....	8
§ 3 Двукратный интеграл как ориентированный объём кривоповерхностного цилиндра.....	10
§ 4 Достаточные условия существования двойного интеграла.....	12
§ 5 Основные свойства кратных интегралов.....	12
§ 6 Сведение двойного интеграла к повторному.....	14
§ 7 Замена переменных в кратном интеграле.....	15
1. Внешнее произведение дифференциальных форм.....	15
2. Замена переменных в двойном интеграле.....	16
§ 8 Поверхностные интегралы первого рода.....	20
§ 9 Поверхностные интегралы второго рода и их физический смысл.....	22
§ 10 Теорема Пуанкаре и её использование при вычислении поверхностных интегралов второго рода.....	23
1. Теорема (формула) Грина.....	24
2. Теорема (формула) Стокса.....	24
3. Теорема (формула) Гаусса – Остроградского.....	25
5. Теорема Лейбница – Ньютона.....	27
6. Пример использования теоремы Пуанкаре.....	27
§ 11 Пример решения задания по кратным и криволинейным интегралам.....	28

Часть 2. Элементы теории определённого и кратного интеграла.

Введение.

Прежде чем доказывать условия существования кратного интеграла, необходимо рассмотреть простые достаточные условия существования определённого интеграла

$\int_a^b f(x)dx$, а именно: непрерывность подинтегральной функции и компактность области интегрирования – отрезка (точнее, сегмента) $[a, b]$ как множества точек x числовой оси, удовлетворяющих двойному неравенству: $(a \leq x \leq b)$. К сожалению, тот факт, что определённый интеграл от функции, не меняющей знак в области интегрирования $[a, b]$, есть именно ориентированная площадь криволинейной трапеции, в учебной литературе недостаточно подчёркивается. Наша основная цель – более внимательно рассмотреть такие фундаментальные понятия, как площадь и объём.

§ 1. Определённый интеграл.

Обозначение. $S = \int_a^b f(x) \cdot dx$. Здесь $f(x)$ есть подинтегральная функция, a и b -

пределы интегрирования, причём a - нижний предел, b - верхний предел, x - переменная интегрирования – так называемая связанная переменная. Для этой переменной можно менять обозначение. Например, справедливо равенство:

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx = \int_a^b f(z) \cdot dz.$$

Если похожая переменная встретится в верхнем или нижнем

пределе интеграла, то это – свободная переменная, которую нельзя переобозначать (во всяком случае, без дополнительных переобозначений в других местах).

Определение 1. Определённый интеграл (геометрический) для знакопостоянной подинтегральной функции есть ориентированная площадь криволинейной трапеции, то есть фигуры, определяемой множеством точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам: $(a \leq x \leq b)$ или $(a \geq x \geq b)$ и $(0 \leq y \leq f(x))$ или $(f(x) \leq y \leq 0)$.

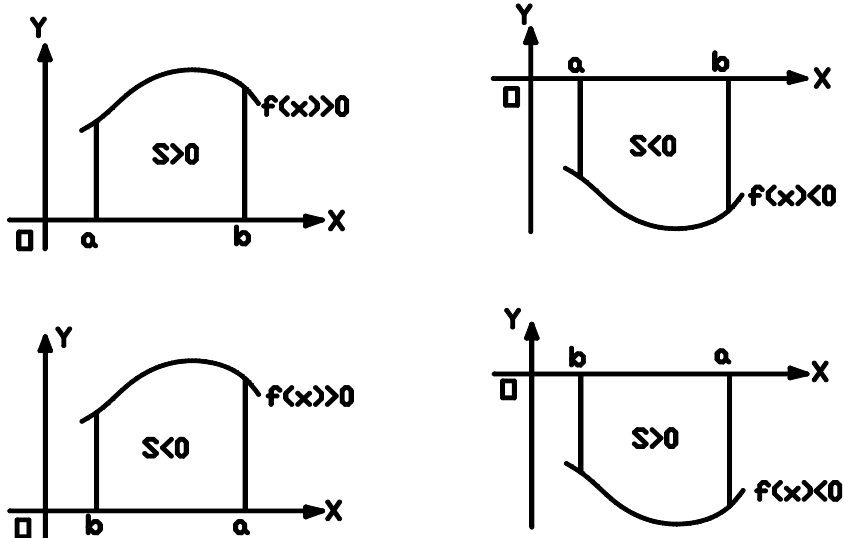
Ориентированная площадь есть площадь со знаком. Знак этой площади определяется следующим образом (см. рисунок).

1 случай. $(a \leq b)$ и $(f(x) \geq 0)$. В этом случае $S = |S| \geq 0$.

2 случай. $(a \leq b)$ и $(f(x) \leq 0)$. В этом случае $S = -|S| \leq 0$.

3 случай. $(a \geq b)$ и $(f(x) \geq 0)$. В этом случае $S = -|S| \leq 0$.

4 случай. $(a \geq b)$ и $(f(x) \leq 0)$. В этом случае $S = |S| \geq 0$.



Определение 1. Определённый интеграл (геометрический) для знакопеременной подинтегральной функции есть алгебраическая сумма определённых интегралов от её знакопостоянных частей.

Пример.
$$\int_{-1}^2 x \cdot dx = \int_{-1}^0 x \cdot dx + \int_0^2 x \cdot dx = -\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Теорема существования определённого интеграла.

Если подинтегральная функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ (иначе, для любого x_0 , такого, что $a \leq x_0 \leq b$ или $a \geq x_0 \geq b$ предел от функции будет равен функции от

предела, то есть: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0)$), то $S = \int_a^b f(x) \cdot dx$ существует.

В следующей лекции после уточнения понятия интеграла требование на поведение подинтегральной функции внутри области интегрирования будет несколько ослаблено.

§ 2. Способы вычисления «наивного» определённого интеграла.

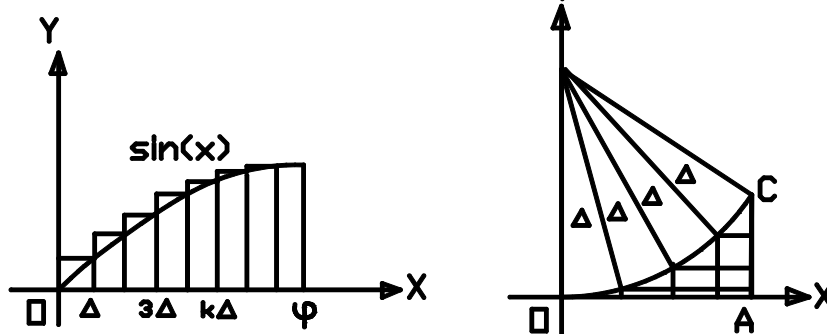
Вычисление определённого интеграла как площади криволинейной трапеции может быть выполнено двумя способами.

Первый способ – вычисление площади путём замены криволинейной трапеции на близкую по площади фигуру с последующим прямым суммированием частей этой фигуры.

Второй способ - составление дифференциального уравнения для площади криволинейной трапеции с последующим его решением.

Пример вычисления по первому способу. Вычислим $\int_0^{\varphi} \sin(x) dx$.

Делим отрезок $[0, \varphi]$ на n равных частей. Заменяем криволинейную трапецию (точнее, криволинейный треугольник) $(0 \leq x \leq \varphi)$, $(0 \leq y \leq \sin(x))$ на близкую по площади ступенчатую фигуру (см. левый рисунок).



Обозначим: $dx = \Delta = \frac{\varphi}{n}$. Тогда площадь ступенчатой фигуры (интегральная сумма), приблизительно равная интегралу (при больших n) будет равна (с точки зрения алгебраиста):

$$(\sin(\Delta) + \sin(2\Delta) + \dots + \sin(n\Delta)) \cdot \Delta \approx \int_0^{\varphi} \sin(x) dx.$$

Левую часть приближительного равенства преобразуем так:

$$(\sin(\Delta) + \sin(2\Delta) + \dots + \sin(n\Delta)) \cdot \Delta = \frac{(\sin(\Delta) + \sin(2\Delta) + \dots + \sin(n\Delta)) \cdot \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \cdot \Delta}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}.$$

Раскрывая скобки в числителе и вспоминая тригонометрическое

равенство: $\sin(k \cdot \Delta) \cdot \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{-1}{2} \left(\cos\left(k \cdot \Delta + \frac{\Delta}{2}\right) - \cos\left(k \cdot \Delta - \frac{\Delta}{2}\right) \right)$, преобразуем

предыдущее равенство следующим образом:

$$\frac{-\left(\cos\left(\frac{3}{2}\Delta\right) - \cos\left(\frac{1}{2}\Delta\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\Delta\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\Delta\right) + \dots + \cos\left(n \cdot \Delta + \frac{\Delta}{2}\right) - \cos\left(n \cdot \Delta - \frac{\Delta}{2}\right)\right) \cdot \Delta}{2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}.$$

Учитывая, что внутренние слагаемые взаимно уничтожаются при приведении подобных членов, получаем:

$$-\left(\cos\left(n \cdot \Delta + \frac{\Delta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right)\right) \frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0$ и учитывая, что $n \cdot \Delta = \varphi$ и что дробь $\frac{\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}$ стремится к единице как первый замечательный

предел, получаем в пределе: $\int_0^{\varphi} \sin(x) dx = -(\cos(\varphi - 0) - \cos(0)) \cdot 1 = 1 - \cos(\varphi)$.

Геометр решил бы эту задачу ещё проще (см. правый рисунок выше). На рисунке $n = 4$,

$$\varphi = 4 \cdot \Delta, \quad AC = \int_0^{\varphi} \sin(x) dx = 1 - \cos(\varphi); \quad OA = \int_0^{\varphi} \cos(x) dx = \sin(\varphi).$$

Пример вычисления по второму способу. Вычислим $S = \int_a^b f(x) \cdot dx$.

Пусть $S(x) = \int_a^x f(z) \cdot dz$. Тогда $\frac{d}{dx} S(x) = \frac{1}{dx} \int_x^{x+dx} f(z) dz \approx \frac{1}{dx} (f(x) + \omega(x)) \cdot dx \approx f(x)$. Здесь

$\omega(x)$ - бесконечно - малое колебание непрерывное функции $f(x)$ на отрезке длиной dx от точки x до точки $x + dx$. Общее решение этого дифференциального уравнения

$\frac{d}{dx} S(x) = f(x)$ есть $S(x) = \int f(x) = F(x) + C$ - неопределённый интеграл как множество

первообразных $F(x)$. Константа C ищется исходя из того, что $S(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

(площадь отрезка от точки $(x, 0)$ до точки $(x, f(x))$ равна нулю). Итак:

$$S(a) = F(a) + C = 0; \quad C = -F(a) \quad \text{и} \quad S(x) = F(x) - F(a) \equiv F(x) \Big|_a^x \quad \text{или} \quad \int_a^x f(z)dz = \int_a^x f(z)dz \Big|_a^x -$$

решение задачи скорее по Ньютону, чем по Лейбницу.

§ 3. Элементы теории определённого интеграла.

Определение интегральной суммы. Интегральная сумма даёт приближённое значение определённого интеграла и вычисляется по следующему алгоритму. Для простоты будем считать, что $a < b$ (нижний предел интеграла меньше верхнего) и $f(x) \geq 0$, то есть подинтегральная функция неотрицательна, следовательно, определённый интеграл неотрицателен.

Шаг 1. Разбиваем сегмент интегрирования $[a, b]$ точками разбиения: $x_0, x_1, \dots, x_n$, причём: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Шаг 2. В каждом сегменте разбиения $[\Delta x_k] = [x_k, x_{k+1}]$ произвольно выбираем точку, принадлежащую этому сегменту: $\tilde{x}_k \in [\Delta x_k]$ или: $(x_k \leq \tilde{x}_k \leq x_{k+1})$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Шаг 3. Вычисляем сумму:

$$\Sigma_{\int} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{x}_k) \Delta x_k = f(\tilde{x}_0) \Delta x_0 + f(\tilde{x}_1) \Delta x_1 + \dots + f(\tilde{x}_{n-1}) \Delta x_{n-1}, \quad \text{где}$$

$(\Delta x_k = x_{k+1} - x_k)$ - (ориентированная) длина сегмента разбиения.

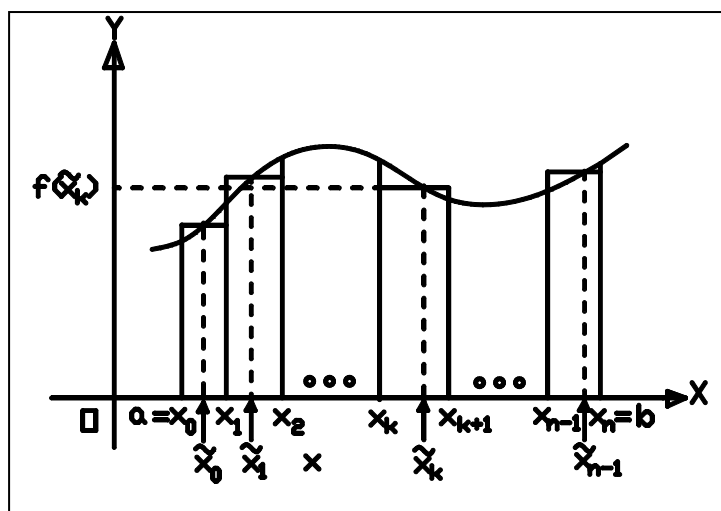
Геометрический смысл интегральной суммы (см. рисунок): Интегральная сумма есть ориентированная площадь ступенчатой фигуры, причём высота ступеньки на каждом сегменте разбиения $[\Delta x_k]$ равна: $f(\tilde{x}_k)$.

Определение. Мелкость разбиения (как функция данного разбиения) есть максимальная из длин сегментов разбиения: $\rho\{k\} = \max_{(k)} (|\Delta x_k|)$ по всем сегментам разбиения.

Очевидно, интегральная сумма при достаточно малой мелкости разбиения должна с хорошей точностью приближаться к определённому интегралу как ориентированной площади криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной двумя прямыми: $x = a$ и $x = b$, осью абсцисс Ox и графиком подинтегральной функции $y = f(x)$.

Определение. Определённый интеграл (алгебраический) есть предел интегральных

сумм, когда мелкость разбиения стремится к нулю: $\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\rho\{k\} \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$. При



этом этот предел не должен зависеть от выбора точек разбиения $\{x_k\}$, а также от выбора точек $\{\tilde{x}_k\}$ внутри сегментов разбиения.

Историческая справка. Указанное определение интеграла было введено в математику немецким математиком Б. Риманом в середине 19 века, поэтому этот интеграл в литературе называется интегралом Римана.

Простое достаточное условие существования интеграла Римана.

Теорема. Если подинтегральная функция $f(x)$ непрерывна на сегменте интегрирования $[a, b]$ (это значит, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0)$ при $a \leq x_0 \leq b$), то интеграл Римана:

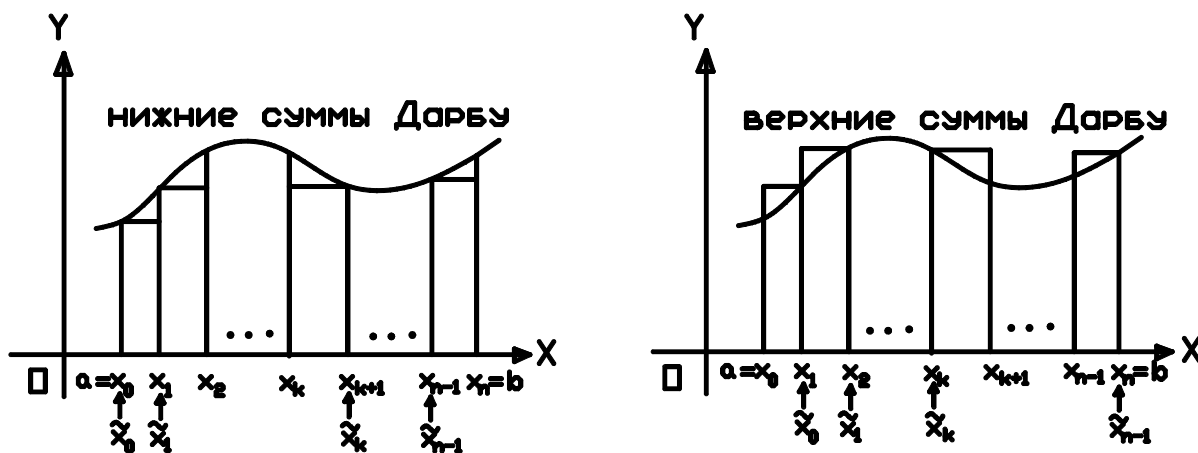
$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\rho\{k\} \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(\tilde{x}_k) \Delta x_k \text{ безусловно, существует.}$$

Схема (план) доказательства этой теоремы.

Основная лемма 1. Интегральная сумма удовлетворяет критерию Коши существования предела. Иначе говоря, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что для любых двух интегральных сумм, мелкость разбиения каждой из которых не превосходит $\delta(\varepsilon)$, модуль разности этих сумм не превзойдёт ε . Тем самым будет достаточно доказать существование предела только для сумм специального вида, а именно, верхних или нижних сумм Дарбу. Г. Дарбу – французский математик, жил в начале 20 века.

Определение. Верхние суммы Дарбу определяются тем, что для данного разбиения $[a, b]$ на каждом сегменте разбиения $[\Delta x_k] = [x_k, x_{k+1}]$ точка $\tilde{x}_k \in [\Delta x_k]$ (точка шага 2) выбирается так, чтобы $f(\tilde{x}_k) = \max f(x)$ по всем x , принадлежащим $[\Delta x_k]$.

Аналогично, нижние суммы Дарбу (см. рисунок) определяются тем, что на каждом сегменте разбиения $[\Delta x_k] = [x_k, x_{k+1}]$ будет $f(\tilde{x}_k) = \min f(x)$ по всем $x \in [\Delta x_k]$.



Лемма 2 (необходимая для доказательства основной леммы). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нём.

Определение. Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $\{x\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой пары точек x_1, x_2 , лежащих в

$\{x\}$ (то есть $x_1 \in \{x\}$ и $x_2 \in \{x\}$), таких, что $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ независимо от расположения этих точек на множестве $\{x\}$ всегда будет $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Ввиду важности для дальнейшего изложения введём понятие колебания функции на множестве значений аргумента (в частности, на сегменте $[a, b]: (a \leq x \leq b)$).

Определение. Колебание функции на множестве значений аргумента есть разность между максимальным и минимальным значением функции на этом множестве.

Контрпример на лемму 2. Функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$

(то есть: $(0 < x < 1)$), но не является равномерно непрерывной на нём.

План доказательства основной леммы (в предположении, что мы временно принимаем на веру лемму 2). Первый частный случай леммы: две интегральные суммы имеют одно и то же разбиение. Тогда, очевидно, разность любых двух интегральных сумм не превосходит разности верхней $\bar{\Sigma}$ и нижней $\underline{\Sigma}$ сумм Дарбу для данного разбиения.

Имеем: $\bar{\Sigma} - \underline{\Sigma} = \sum_{(k)} \omega_k \cdot \Delta x_k$, где $\omega_k = \max(f(\tilde{x}_{k2})) - \min(f(\tilde{x}_{k1}))$ по всем $\tilde{x}_{k1}$ и $\tilde{x}_{k2}$,

принадлежащим сегменту (элементу) разбиения $[\Delta x_k]$. Напомним, что ω_k есть

колебание $f(x)$ на $[\Delta x_k]$. По лемме 2 о равномерной непрерывности $\forall \varepsilon \exists \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$

(читается: для любого ε существует δ , зависящее от $\frac{\varepsilon}{b-a}$) такое, что для любого

разбиения мелкости $\rho: \rho < \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$ для всех элементов разбиения все колебания

будут меньше $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно,

$\bar{\Sigma} - \underline{\Sigma} = \sum_{(k)} \omega_k \cdot \Delta x_k < \sum_{(k)} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{(k)} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$. Первый случай

доказан.

Второй частный случай леммы: точки одного разбиения целиком входят в состав другого разбиения. В этом случае мелкость разбиения с меньшим числом точек

(«крупного» разбиения) берётся так, как в первом случае: $\rho: \rho < \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$. Несколько

слагаемых разбиения с большим числом точек («мелкого» разбиения) группируются по принадлежности их элементов разбиения одному элементу «крупного» разбиения.

Одно слагаемое «крупного» разбиения разбивается на несколько слагаемых с одним и тем же $\tilde{x}_k$, но с Δx_k , соответствующими элементам «мелкого» разбиения. В этом

случае модуль разности значений функции с коэффициентом Δx_k в разности двух

интегральных сумм не превзойдёт колебания $\rho: \rho < \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$ «крупного» разбиения, и

оценка разности двух интегральных сумм будет той же, что и в первом случае. Второй случай доказан.

Общий случай леммы. Для двух интегральных сумм берём третью интегральную сумму, точки разбиения которой состоят из точек первой и второй сумм. В силу второго частного случая разность между первой и третьей суммами может быть

сделана меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ и между второй и третьей суммами также меньше $\frac{\varepsilon}{2}$.

Следовательно, разность между первой и третьей суммами будет меньше $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Итак, основная лемма доказана.

Поверив первой и второй леммам, сформулированная выше теорема существования доказывается просто. Берём равномерное разбиение сегмента $[a, b]$, где все длины

элементов разбиения равны $\frac{b-a}{2^n}$. Тогда, очевидно, при возрастании натурального n

нижние суммы Дарбу возрастают и ограничены сверху верхней суммой Дарбу при $n = 0$. Ограничивающая константа есть $\max(f(x)) \cdot (b-a)$. Поэтому эти суммы Дарбу частного вида имеют предел. В силу основной леммы любые другие суммы Дарбу

имеют тот же предел, который и есть $\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\rho\{k\} \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{k=n-1} f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$.

Доказательство леммы 2 о равномерной непрерывности (точнее, схема доказательства).

Лемма 2.1. Всякое бесконечное покрытие сегмента $[a, b]$ окрестностями точек сегмента имеет конечное подпокрытие.

Пример. Множество точек $\left\{x_k = \frac{1}{2^k}\right\}$, где $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$, очевидно, удовлетворяет

требованию леммы 1. Пусть, например каждое x_k покрыто интервалом

$\left(x_k - \frac{1}{8^k}, x_k + \frac{1}{8^k}\right)$. Покроем $x_\infty = 0$ интервалом $(x_\infty - \varepsilon, x_\infty + \varepsilon)$, где ε - достаточно

малое, но фиксированное число, отличное от нуля. Тогда конечным подпокрытием нашего бесконечного покрытия будет интервал шириной 2ε , покрывающий $x_\infty = 0$ и покрытия тех x_k , которые превышают ε , то есть $x_k > \varepsilon$.

Лемма 2.2 (теорема Лебега). Для каждого конечного покрытия сегмента $[a, b]$ (существующего по лемме 2.1) найдётся сегмент столь малой длины, что этот сегмент, где бы он не располагался внутри $[a, b]$, попадёт целиком внутрь какого-либо элемента конечного покрытия.

Из этих двух лемм вытекает лемма о равномерной непрерывности следующим образом.

Для каждой точки сегмента $[a, b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ такое, что весь

сегмент будет иметь бесконечное покрытие интервалами $\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ с центрами в

любой точке сегмента $x_0 \in [a, b]$. При этом $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $x \in \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Применяем лемму 2.1, получаем конечное число интервалов $\left(x_k - \frac{\varepsilon}{2}, x_k + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, где

$k = 1, 2, \dots, m$, покрывающих весь сегмент $[a, b]$. Применяем лемму 2.2 Лебега, найдём $\delta_{\text{лебега}}(\varepsilon) > 0$ такое, что интервал длины $\delta_{\text{лебега}}(\varepsilon)$ (где бы он не находился внутри $[a, b]$)

целиком лежит в каком-либо интервале конечного покрытия. Следовательно, для любых x_1 и x_2 интервала длины $\delta_{\text{лебега}}(\varepsilon)$ будем иметь:

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |f(x_2) - f(x_0)| + |f(x_1) - f(x_0)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ где } x_0 - \text{центр интервала}$$

конечного покрытия, в котором лежат x_1 и x_2 . Итак равномерная непрерывность доказана.

Осталось доказать леммы 2.1 и 2.2. доказываются они обе от противного. А именно: строится сходящаяся последовательность интервалов (в смысле сходимости их центров к предельной точке), причём их длины стремятся к нулю. При этом требуется, чтобы каждый из этих интервалов либо не допускал конечного покрытия (нарушение леммы 2.1) либо не находился целиком в интервале конечного покрытия (нарушение леммы 2.2). тогда в любой сколь угодно малой окрестности предельной точки центров найдется интервал сходящейся последовательности, который с одной стороны (по построению) нарушает условия одной из этих лемм, а с другой стороны, целиком лежит в одном из элементов покрытия (как нетрудно проверить). Полученное противоречие и доказывает леммы. Аналогичное доказательство см. [Телеман].

§ 4. Измеримость по Жордану и Лебегу.

Если принять концепцию меры Римана – Жордана, то считается, что скажем, то криволинейная трапеция: $a \leq x \leq b$; $0 \leq y \leq f(x)$, ограниченная графиком непрерывной функции, измерима, если границу этой области можно покрыть конечным числом прямоугольников сколь угодно малой суммарной площади. Соответственно, функция $f(x)$, график которой ограничивает эту криволинейную трапецию, называют интегрируемой по Риману.

Для интегрирования функций таких, как функция Дирихле $D(x)$ (равная нулю в иррациональных точках x и единице, если аргумент x рационален) Анри Лебег разрешил покрытие границы криволинейной трапеции бесконечным числом прямоугольников сколь угодно малой суммарной площади.

Заметим, что ввиду этого обстоятельства ряд учёных отнесли к интегралу Лебега с недоверием, несмотря на хорошо разработанную математическую теорию интеграла Лебега. Однако, дело с интегрированием по Лебегу на компьютере обстоит не так уж плохо, если выбирать точки $\tilde{x}_k$ внутри элементов разбиения с помощью случайной функции и моделировать компьютерно – иррациональные числа несократимыми дробями, знаменатель которых превышает достаточно большое заданное число (речь идёт об интегрировании функции Дирихле).

Итак, рассмотрим интегрирование функции Дирихле сначала по Риману, а затем по Лебегу.

1. Интегрирование функции Дирихле по Риману.

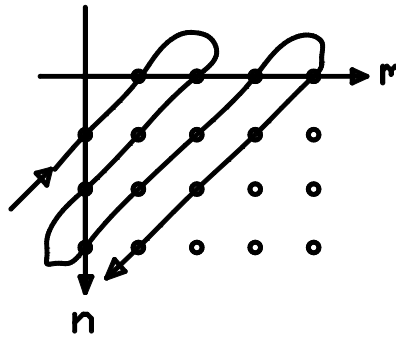
Интегрирование этой функции по Риману выполнить невозможно, поскольку минимальное покрытие границы соответствующей криволинейной трапеции конечным числом прямоугольников можно выполнить только с помощью единичного квадрата. Заметим, что эта криволинейная трапеция совпадает со своей границей и представляет собой множество отрезков вида: $x = x_{\text{рац}}$ и $0 \leq y \leq 1$, причем $x_{\text{рац}}$ есть рациональное число (дробь с целым числителем и знаменателем, причём $0 \leq x_{\text{рац}} \leq 1$). Так как минимальное значение площади покрытия границы есть единица (не бесконечно – малое число), то функция Дирихле не измерима по Риману.

2. Интегрирование функции Дирихле по Лебегу.

Поскольку разрешается покрытие границы криволинейной трапеции бесконечным числом прямоугольников, то сделаем это покрытие следующим

способом. Известно, что множество рациональных дробей вида $x_{\text{рац}} = \frac{m}{n}$ счётно

(его можно пересчитать), поскольку узлы сетки бесконечной матрицы можно пересчитать вдоль конечных диагоналей (левый низ – правый верх) этой матрицы.



Криволинейная трапеция в нашем случае – это множество отрезков $x = x_{\text{рац}} = \frac{m}{n}$

и $0 \leq y \leq 1$. Покроем первое число $x = x_1$ отрезком длины $\frac{\varepsilon}{2}$, то есть

отрезком $\left[x_1 - \frac{\varepsilon}{4}, x_1 + \frac{\varepsilon}{4} \right]$, второе число $x = x_2$ отрезком длины $\frac{\varepsilon}{4}$, число $x = x_n$

отрезком длины $\frac{\varepsilon}{2^n}$, то есть отрезком $\left[x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right]$. Тогда граница

криволинейной трапеции будет покрыта прямоугольниками вида: Δ_n :

$x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq x \leq x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ и $0 \leq y \leq 1$. Очевидно, суммарная площадь этого

покрытия есть: $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Сумма этой геометрической прогрессии равна:

$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon$, то есть бесконечно-мала. Итак, отсюда видно, что функция Дирихле

интегрируема по Лебегу. Поскольку оставшаяся после покрытия часть криволинейной трапеции содержит только иррациональные x , где функция Дирихле равна нулю, то интеграл Лебега от функции Дирихле также равен нулю.

§ 5. Критерий интегрируемости по Риману.

В данном случае интеграл будет предполагаться собственным, то есть измеряемая им криволинейная трапеция ограничена (может быть помещена внутри круга достаточно большого радиуса). Это предполагает ограниченность как самой функции внутри её области интегрирования, так и самой области интегрирования, так что в дальнейшем эти условия специально оговариваться не будут. Итак, имеет место

теорема (критерий интегрируемости по Риману). Функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество точек разрыва этой функции имеет меру нуль по Лебегу.

Пример использования этого критерия. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{m}$, где m есть максимальная длина из длин отрезков периодичности и аperiodичности мантиссы (дробной части) разложения аргумента функции x в бесконечную десятичную дробь.

Пояснение. Известно, что всякая дробь разлагается в бесконечную десятичную

периодическую дробь. Пример. $\frac{1373}{11000} = 0.124(81) = 0.12481818181\dots$. Здесь

отрезок периодичности – 81, его длина – 2. Отрезок аperiodичности – 124, его длина – 3. Итак, имеем значение функции: $f\left(\frac{1373}{11000}\right) = \frac{1}{\max(2,3)} = \frac{1}{3}$. Очевидно,

значение этой функции в иррациональных точках есть $\frac{1}{\infty} = 0$. Нетрудно видеть,

что эти точки являются точками непрерывности нашей функции. Очевидно,

$\int_0^1 f(x)dx = 0$ как в смысле Римана, так и в смысле Лебега. К указанной функции

можно применить критерий интегрируемости по Риману, поскольку множество периодических дробей как множество рациональных чисел счётно (см. пример функции Дирихле, приведённый выше) и поэтому имеет меру нуль по Лебегу. Это же множество есть множество точек разрыва нашей функции.

Доказательство интегрируемости этой функции по Риману повторяет доказательство самого критерия интегрируемости, поэтому дадим схему доказательства этого критерия.

Необходимость.

- 1 Предположим, что интеграл Римана от некоторой функции существует, то есть для любого разбиения области интегрирования разность верхних и нижних сумм Дарбу, равная сумме произведений длин элементов разбиения на колебания функции на этих элементах сколь угодно мала при достаточно малой мелкости разбиения. Назовём его общим колебанием интеграла.
- 2 Покрываем точки непрерывности функции окрестностями, внутри которых колебания функции не превосходят общего колебания интеграла, делённого на длину области интегрирования. Точки разрыва покрываем множеством окрестностей, суммарная мера которых отличается сколь угодно мало от меры Лебега точек разрыва, то есть от длины объединения этих окрестностей.
- 3 Выделяем из полученного бесконечного покрытия конечное подпокрытие. Напомним, что это можно сделать в силу предположения о том, что область интегрирования ограничена и замкнута относительно операции взятия предела. Последнее означает, что если элементы последовательности, имеющей предел, принадлежат области интегрирования, то и сам предел также принадлежит области интегрирования.
- 4 Измельчим наше первоначальное разбиение так, чтобы (по лемме Лебега) каждый элемент разбиения целиком лежал внутри какой-либо окрестности подпокрытия. Каждый элемент разбиения принадлежит или

- окрестности непрерывности (элемент непрерывности) либо окрестности разрыва (при условии, что элемент не принадлежит одновременно и окрестности непрерывности, назовём его элементом разрыва).
- 5 Колебание интеграла есть сумма колебаний по элементам непрерывности и разрыва. Поскольку сумма этих положительных чисел бесконечно – мала, то и каждое из этих чисел бесконечно – мало, в частности, речь идёт о колебании интеграла по элементам разрыва. Отсюда вытекает, что сумма длин элементов разрыва меньше, чем колебание интеграла, делённое на минимум колебаний на конечном числе элементов разрыва – не бесконечно малое число (иначе речь бы шла об элементе непрерывности).
 - 6 Отсюда видно, что сумма длин элементов разрыва бесконечно – мала, то есть множество точек разрыва покрыто элементами разрыва с бесконечно – малой суммарной длиной, то есть имеет меру Лебега, равную нулю, что и требовалось доказать.

Достаточность.

1. Разбиваем элементы разбиения области интегрирования на элементы непрерывности и элементы разрыва так, как мы это делали при доказательстве необходимости.
2. Колебание по элементам непрерывности бесконечно мало, так как колебание функции на элементах непрерывности бесконечно мало (минимум конечного числа бесконечно – малых колебаний элементов непрерывности). Отметим, что термин «бесконечно – малое» следует понимать так: «может быть сделано меньше любого наперёд заданного числа». Колебание по элементам разрыва бесконечно мало, так как сумма элементов разрыва по условию бесконечно – мала, а колебание на элементах разрыва ограничено сверху ввиду ограниченности подинтегральной функции. Колебание интеграла есть сумма колебаний по элементам непрерывности и разрыва, следовательно, оно также бесконечно – мало, то есть интеграл Римана существует, и функция интегрируема по Риману, что и требовалось доказать.

§ 6. Обобщение теории определённого интеграла на кратные интегралы.

Описанная выше теория интеграла как площади криволинейной трапеции без особого труда обобщается на кратные интегралы. Однако здесь появляется новый момент: измеримость контура области интегрирования.

Определение. Характеристическая функция множества точек (в данном случае точек области интегрирования) G определяется так: $\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \notin G \\ 1 & \text{если } x \in G \end{cases}$. Значок

« $\in$ » здесь означает «принадлежит», значок « $\notin$ » здесь означает «не принадлежит».

Можно доказать, что: $\iint_G f(x, y) dx \wedge dy = \iint_{\diamond} f(x, y) \cdot \mu(x, y) \cdot dx \wedge dy$, если $f(x, y)$

непрерывна на G , и G измерима по Риману – Жордану. Здесь $\diamond$ означает какую-нибудь простую фигуру (например, ромб или квадрат), в которой целиком помещается область интегрирования G при условии измеримости границы области G . Выбор объёмлющей фигуры определяется простотой разбиения этой фигуры на элементы разбиения при построении интегральных сумм. Если G измерима по Жордану, то множество точек разрыва функции $f(x, y) \cdot \mu(x, y)$ измерима по Риману (то есть это

множество покрывается сколь угодно малым по площади многоугольником с конечным числом сторон). Следовательно, это множество измеримо также и по Лебегу и по критерию интегрируемости интеграл Римана левой части последнего равенства существует. Следовательно, следует ожидать, что на кратных интегралах по области с «хорошей» границей, критерий интегрируемости по Риману должен выполняться. Если же характеристическая функция множества есть функция Дирихле (иначе говоря, G есть множество точек внутри $\diamond$, одна из координат которых рациональна), то (скажем, при $f(x, y) = 1$) любая точка $\diamond$ есть точка разрыва подинтегральной функции $f(x, y) \cdot \mu(x, y)$. Критерий интегрирования здесь не проходит, об интеграле Римана здесь не может быть и речи. Речь может быть только об интегрировании по Лебегу, к чему мы сейчас и переходим.

§ 7. Интеграл Римана в форме Лебега и интеграл Лебега.

Рассматривая интеграл Римана $\int_a^b f(x)dx$ как площадь криволинейной трапеции,

можно, очевидно, делать разбиение не только по диапазону переменной x , но и по диапазону переменной y . В этом последнем случае получаем интеграл Римана в форме Лебега. Делаем разбиение по диапазону $[c, d]$ координаты y , где $(c \leq y \leq d)$, где c может иметь нулевое значение, а d - максимальное значение подинтегральной функции на области интегрирования $[a, b]$. Пусть

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_k < y_{k+1} < \dots < y_{m-1} < y_m = d$, где $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ - точки разбиения $[c, d]$. Обозначим G_k ($k = 0, 1, \dots, m-1$) множества координат таких, что $x \in G_k$ тогда и только

тогда, когда $y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}$. Пусть $\mu_{G_k}(x)$ - характеристическая функция множества

G_k (см. предыдущий раздел), то есть $\mu_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \notin G \\ 1 & \text{если } x \in G \end{cases}$. Тогда интегральные

суммы по Лебегу определяются как суммы вида: $\sum_{k=0}^{m-1} (y_{k+1} - y_k) \cdot m(G_k)$, где

$m(G_k) = \int_a^b \mu_{G_k}(x) \cdot dx$ есть мера Римана множества G_k . Интегралы от

характеристических функций, естественно, понимаются в смысле Римана. Тогда предел указанных интегральных сумм Лебега называют интегралом Римана в форме Лебега.

Если подинтегральная функция $f(x)$ непрерывна, то естественно ожидать совпадение обычного интеграла Римана с интегралом Римана в форме Лебега. Речь, по существу,

идёт об изменении порядка интегрирования в повторном интеграле $\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=0}^{y=f(x)} dy \right) dx$.

Заметим, что при вычислении интегралов Римана по методу Монте – Карло более удобно их вычислять в форме Лебега, а не в форме Римана. Суть метода состоит в том, что датчик случайных чисел выдаёт случайные пары чисел (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, то есть точки, равномерно распределённые на плоскости (пример: капли дождя на небольшом участке плоскости). Для каждого y_i ищется k такое, что $y_k \leq y_i < y_{k+1}$. В этом случае направляем соответствующую точку (x_i, y_i) в G_k . Пусть n_k есть

количество таких точек в G_k . Тогда $m(G_k) \approx \frac{n_k}{N} \cdot (b-a)$, для достижения точности ε следует бросить количество точек $N \approx \frac{(b-a)(d-c)}{\varepsilon^2}$. Удобство формы Лебега состоит в том, что при $(d-c) < (b-a)$ в интегральной сумме при заданной точности надо брать меньшее число слагаемых.

Рассмотрим теперь традиционный способ вычисления меры Римана плоской фигуры, измеримой по Риману. Покроем границу фигуры многоугольником с конечным числом сторон площадью, меньшей любого сколь угодно малого числа ε . При этом предполагаем, что любая точка границы есть центр круга сколь угодно малого радиуса, целиком лежащего внутри нашего многоугольника. Накладываем на нашу фигуру прямоугольную сетку, нарисованную на прозрачной основе. Суммируем площади прямоугольников или квадратов сетки (элементов сетки), лежащих внутри фигуры, и не пересекающих границу фигуры. Получаем внутреннюю меру Римана фигуры. Добавляем к внутренней мере суммарную площадь элементов сетки, имеющей с границей фигуры непустое пересечение (меру границы фигуры). Получаем внешнюю меру Римана фигуры. Очевидно, при измельчении сетки внутренние меры монотонно возрастают, внешние меры монотонно убывают, а мера границы фигуры бесконечно мала, так как соответствующие элементы сетки целиком попадают внутрь многоугольника, покрывающего границу.

Определение. Мера Римана фигуры, измеримой по Риману, называется общий предел её внешней и внутренней мер при неограниченном измельчении сетки (мелкость сетки стремится к нулю).

Определение. Мера Лебега фигуры, измеримой по Лебегу называется нижний предел множества мер её покрытий элементарными фигурами (например, квадратами) с мелкостью, не превосходящую заданную, то есть суммарных площадей бесконечного множества элементарных фигур, покрывающей заданную (измеряемую) фигуру.

Определение. Нижний предел множеств точек числовой оси есть предел нижних граней точек этих множеств.

Определение. Нижняя грань множества точек числовой оси есть такая точка, левее которой нет точек этого множества, но стоит только нижнюю грань немного сместить вправо, как левее это смещённой точки появятся точки данного множества.

На самом деле, поскольку нижние грани множеств покрытий при нахождении меры Лебега совпадают, то предел в данном случае тривиален (предел одинаковых нижних граней), и можно определить меру Лебега просто как нижнюю грань всевозможных покрытий измеряемого множества элементарными фигурами. Причина столь хитрого определения меры Лебега через предел нижних граней выяснится позже при определении площади поверхности по Лебегу.

Очевидно, о внутренней мере, например, множества иррациональных точек на отрезке $[0,1]$, понимаемой в традиционном смысле Римана, говорить не приходится. Лебег определил внутреннюю меру Лебега через внешнюю меру дополнения измеряемого множества до любого многоугольника, покрывающего измеряемую фигуру (то есть через внешнюю меру множества точек, лежащих в многоугольнике, но не лежащих в фигуре).



Задача. Доказать независимость меры Римана от способа наложения сетки на измеряемую фигуру. Указание: ввести понятие расстояния от границы многоугольника покрытия границы до самой границы фигуры.

Задача. Доказать совпадение мер Римана и Лебега для фигуры, измеримой по Риману.

Замечание по стилю изложения. Читатель уже заметил, что вспомогательные понятия, используемые для определения главного понятия, часто определяются после определения главного понятия. Телега, так сказать, бежит впереди лошади. Дело в том, что предварительное определение большого количества вспомогательных понятий скрывает цель, ради которой они вводятся. Поэтому более важное понятие «телега» следует иногда вводить раньше вспомогательного понятия «лошадь». Ибо в данном случае цель – перевести груз, который вначале кладётся в телегу, а затем к ней присоединяют лошадь или трактор.

§ 8. Длина кривой и площадь поверхности.

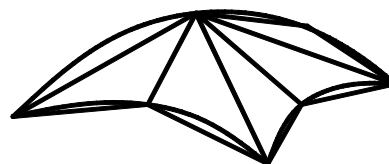
Определение. Элемент триангуляции есть либо отрезок прямой (в одномерном случае), либо треугольник (в двумерном случае), либо тетраэдр (в трёхмерном случае), то есть неправильная треугольная пирамида. Можно рассматривать элемент триангуляции как множество центров тяжести масс, расположенных в вершинах этого элемента.

Нетрудно обобщить понятие тетраэдра на n -мерный случай. В этом случае можно определить $n-1$ -мерную грань n -мерного тетраэдра как множество центров тяжести масс в n вершинах тетраэдра в случае, когда ровно одна из этих масс равна нулю.

Определение. Триангуляция n -мерной поверхности есть совокупность n -мерных её элементов, пересекающихся либо по $n-1$ -мерной грани, либо не пересекающихся вовсе, причём вершины элементов триангуляции должны лежать на этой поверхности.



**ОДНОМЕРНАЯ
ТРИАНГУЛЯЦИЯ**



ДВУМЕРНАЯ ТРИАНГУЛЯЦИЯ

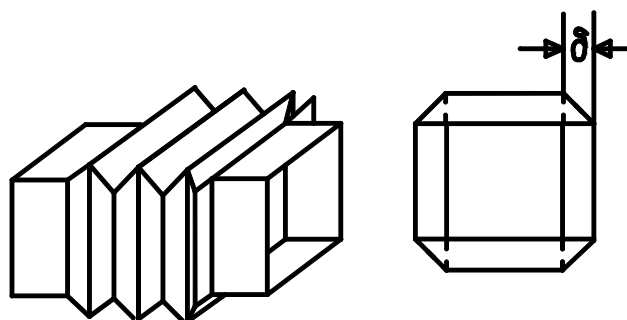
Следуя методу Лебега, определим длину участка кривой или площадь участка поверхности как нижний предел множества мер триангуляций, равномерно приближающих этот участок, когда мелкость триангуляции не превосходит заданную, причём заданная мелкость стремится к нулю. Равномерность следует понимать в том смысле, что если точки участка кривой или поверхности являются центрами кругов или шаров сколь угодно малого радиуса, то триангуляция целиком покрывается этими кругами или шарами. Мера триангуляции понимается как суммарная мера всех составляющих её элементов. Мелкость триангуляции понимается как максимальное расстояние между какими-либо двумя точками, лежащими в одном элементе триангуляции.

Определение. Расстояние от триангуляции до измеряемого участка кривой или поверхности есть максимум из минимумов расстояний от точки элемента триангуляции до точек измеряемого (триангулируемого) участка кривой или поверхности. Максимум берётся по всем элементам триангуляции.

§ 9. Контрпример Шварца.

Вопрос в данном случае состоит в том, зачем Лебегу понадобилось столь сложное (через нижний предел) определение длины кривой или площади поверхности. Казалось достаточным дать такое «наивное» определение площади поверхности как предела площади триангуляции поверхности в случае, когда мелкость триангуляции стремится к нулю. Однако Г. Шварц (немецкий математик, живший во второй половине 19 века) дал поучительный пример сколь угодно мелкой триангуляции со сколь угодно малым расстоянием от триангулируемой поверхности.

Рассмотрим «гармошку», надетую на прямоугольный параллелепипед или на прямоугольный цилиндр. На рисунке число звеньев гармошки $n = 3$.



Очевидно, площадь гофрированной части гармошки равна $n \cdot c \cdot \delta$, где c - некоторая константа. Считая толщину кожи гармошки сколь угодно малой, мы можем надеть на прямоугольный цилиндр заданных размеров сколько угодно звеньев гармошки. Ввиду этого площадь гофрированной части гармошки может стать сколь угодно большой и отнюдь не стремится к боковой поверхности прямоугольного цилиндра. Следует, кстати, отметить, что «наивное» определение длины кривой ещё проходит.

Другое дело, если мы начнём минимизировать число звеньев гармошки, натягивая её до предела на заданный участок боковой поверхности прямоугольного цилиндра. В этом случае боковая поверхность гармошки как триангуляции боковой поверхности цилиндра будет стремиться к минимуму, что и отражает определение Лебега боковой поверхности цилиндра.

Заметим, наконец, сходство и различие определения меры Лебега плоской фигуры и кривоповерхностной фигуры как участка на кривой поверхности. Во втором случае мы имеем нетривиальный пример использования понятия нижнего предела. Если ограничение сверху на мелкость разбиения ослаблено, триангуляция может состоять из одного треугольника. Очевидно, нижняя грань множества, состоящего из одного треугольника, явно меньше, чем истинная площадь участка кривой поверхности. При уменьшении ограничителя на мелкость триангуляции (иначе говоря, когда ограничение на мелкость становится более жёстким), мелкость триангуляции возрастает, и нижняя грань возрастает тоже (во всяком случае, для выпуклой поверхности). Можно показать, что при измельчении триангуляции множество мер определённых выше вписанных триангуляций (и их нижних граней) не превосходит меры описанного многогранника, образованного касательными плоскостями к поверхности с точками касания – вершинами вписанной триангуляции (это верно для выпуклой и гладкой, то есть дифференцируемой поверхности). В следующем разделе будет доказано существование площади поверхности по Лебегу для графика функции $z = f(x, y)$, непрерывной вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

§ 10. Вычисление площади поверхности дифференцируемой функции по Лебегу.

Теорема. Пусть $z = f(x, y)$, непрерывна вместе со своими частными производными $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ на некоторой области G плоскости XOY , задаваемой неравенствами: $(a \leq x \leq b)$ и $(\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x))$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - непрерывные функции. Тогда интеграл $\iint_{(G)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx \wedge dy$ даёт значение площади

участка поверхности по Лебегу. При этом область интегрирования G есть проекция участка поверхности S графика функции $z = f(x, y)$ на плоскость XOY .

Доказательство.

1. Рассмотрим какую-нибудь триангуляцию области интегрирования G . Можно считать, что она состоит из прямоугольных треугольников со сторонами, параллельными осям OX и OY , поскольку любой треугольник можно разбить на сумму прямоугольных треугольников. Полученная триангуляция на G есть проекция некоторой триангуляции на S .
2. Вычислим площадь элемента триангуляции на S . Уравнение плоскости треугольника триангуляции имеет вид $f_t(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C - z = 0$. Пусть (x_0, y_0) , (x_1, y_0) , (x_0, y_1) - вершины прямого и двух острых углов элемента триангуляции на G . Тогда по теореме Лагранжа имеем:

$$A = \frac{f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}_0, y_0), \text{ где } (\tilde{x}_0, y_0) - \text{некоторая точка на стороне}$$

катета. Аналогично получаем: $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \tilde{y}_0)$. Нормаль (вектор - перпендикуляр)

к плоскости $f_t(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C - z = 0$ имеет вид:

$$N = \left(\frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}, \frac{\partial f_t}{\partial z} \right) = (A, B, -1). \text{ Поскольку площадь проекции (площадь элемента}$$

триангуляции $\Delta(G)$) равна площади элемента триангуляции $\Delta(S)$, умноженной на косинус угла между плоскостями или между их нормальными - то есть на

$$\cos(\gamma), \text{ то } \Delta(S) = \frac{|\Delta(G)|}{|\cos(\gamma)|}. \text{ Поскольку}$$

$$|\cos(\gamma)| = \frac{\left| \frac{(\vec{N} \cdot \vec{k})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{k}|} \right|}{\left| \frac{(\vec{N} \cdot \vec{k})}{|\vec{N}| \cdot |\vec{k}|} \right|} = \frac{\left| \frac{(A, B, -1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + (-1)^2}} \right|}{\left| \frac{(A, B, -1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + (-1)^2}} \right|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}, \text{ то } \Delta(S) = \sqrt{A^2 + B^2 + 1} \cdot \Delta(G).$$

3. По условию, частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на замкнутом и

ограниченном множестве G , поэтому они равномерно непрерывны на нём (см. доказательство теоремы существования определённого интеграла). Это значит, что можно выбрать столь маленькую мелкость разбиения области интегрирования G , что на любом элементе разбиения этой области независимо от расположения элемента внутри области колебание (то есть разница между максимумом и минимумом) частных производных будет меньше любой наперёд заданной величины ε . Это же относится и к сумме их квадратов. Обозначив сумму квадратов частных производных символом a , сделаем оценку колебания квадратного корня подинтегральной функции предполагаемого выражение для

площади поверхности. Имеем:

$$\sqrt{1+(a+\Delta a)} - \sqrt{1+a} = \frac{\sqrt{1+(a+\Delta a)^2} - \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+(a+\Delta a)} + \sqrt{1+a}} < \frac{a}{2} < a. \text{ Итак, колебание}$$

квадратного корня не превосходит колебания любой из частных производных на элементе разбиения G .

4. Отсюда вытекает, что погрешность интегральной суммы при замене $\tilde{x}_0$ на x_0 и $\tilde{y}_0$ на y_0 не превысит $\varepsilon \cdot \Delta(G)$. Далее, при любом подразбиении элемента разбиения G замена точки (x_0, y_0) на любую точку $(\tilde{x}, \tilde{y})$ внутри этого элемента даст такую же погрешность. Следовательно, при переходе на нижнюю грань любого подразбиения элемента разбиения G будет та же погрешность. Та же ситуация останется при переходе к пределу нижних граней, то есть при вычислении $\Delta(S)$ по Лебегу.

5. Итак, общая погрешность при замене площади $\sum \Delta(S)$ на интегральную сумму

$$\iint_{(G)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx \wedge dy \text{ не превысит } \varepsilon \cdot \sum \Delta(G), \text{ то есть на}$$

произведение ε на ограниченную по условию площадь области интегрирования. Поскольку указанный интеграл существует как интеграл от непрерывной функции, то отсюда и вытекает утверждение теоремы от выражении площади по

$$\text{Лебегу через интеграл } \iint_{(G)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx \wedge dy, \text{ что и требовалось}$$

доказать.

Литература.

1. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики. Москва, «Наука», 1979 г.
2. К. Телеман. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия, «Мир», Москва, 1967 г., стр. 101.
3. [Maple] В. Дьяконов. Maple7: учебный курс. «Питер», Санкт-Петербург, 2002 г.

Оглавление части 2.

Часть 2. Элементы теории определённого и кратного интеграла.....	34
§ 1. Определённый интеграл.	34
§ 2. Способы вычисления «наивного» определённого интеграла.	35
§ 3. Элементы теории определённого интеграла.....	37
§ 4. Измеримость по Жордану и Лебегу.....	41
§ 5. Критерий интегрируемости по Риману.	42
§ 6. Обобщение теории определённого интеграла на кратные интегралы.	44
§ 7. Интеграл Римана в форме Лебега и интеграл Лебега.	45
§ 8. Длина кривой и площадь поверхности.....	47
§ 9. Контрпример Шварца.	48
§ 10. Вычисление площади поверхности дифференцируемой функции по Лебегу.	49
Литература.	50