ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Московский государственный университет
приборостроения и информатики

кафедра высшей математики

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания для студентов дневной формы обучения.

Москва 2007

Составители: к.т.н. Антонова И.И., к.т.н. Маджитова Ф.Ш., к.т.н. Маджитов Д.Ф.
УДК 517.
Функции многих переменных: методические для студентов дневной формы обучения./МГУПИ. Сост. к.т.н., Антонова И.И., к.т.н. Маджитова Ф.Ш., к.т.н. Маджитов Д.Ф..М. 2007.

Излагаются основные методы решения задач. Предназначено для самостоятельного закрепления навыков решения задач и подготовки к экзамену..

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дневной форме обучения.

Рецензент: доц. Якобовская И.М.

Первая рассматриваемая задача по разделу «Функции многих переменных» предназначена для закрепления навыков вычисления частных производных. Прежде чем приступить к разбору задачи мы напомним некоторые основные понятия.

Если $z = f(x;y)$ является функцией двух независимых переменных x и y, то частные производные этой функции определяются следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x;y) - f(x;y)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x;y+\Delta y) - f(x;y)}{\Delta y}.$$

Из этого определения следует следующее правило вычисления частных производных. При вычислении $\frac{\partial z}{\partial x}$ - частной производной по переменной x мы можем пользоваться всеми теми приемами, которые мы использовали ранее для вычисления производной функции одной переменной, считая при этом переменную y постоянной величиной. Аналогично, при вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ - частной производной по переменной y мы можем пользоваться всеми теми приемами, которые мы использовали ранее для вычисления производной функции одной переменной, считая при этом переменную x постоянной величиной. Студенты, которые считают, что они хорошо овладели навыками дифференцирования, могут дальнейшие пояснения пропустить и непосредственно перейти к решению задачи. Мы приведем некоторые дополнительные пояснения для тех студентов, а их, как показывает опыт, к сожалению не так уж и мало. Поэтому мы приведем пояснения, которые для некоторой части студентов покажутся тривиальными (мы заранее просим не обижаться на нас за это), но надеемся при этом, что для части студентов они окажутся полезными.

Так вот первое, что полезно запомнить.

Если $z(x;y) = x$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$. (Надеемся, что вы не забыли, что для функции одной переменной $(x)' = 1$).

Кратко это запишем так $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

Если $z(x;y) = y$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. (Надеемся, что вы не забыли, что для функции одной переменной производная постоянной равна нулю).

Кратко это запишем так $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

Аналогично имеем: $\frac{\partial x}{\partial y}=0$; $\frac{\partial y}{\partial y}=1$.

Рассмотрим в начале очень простой пример.

<u>Задача 1</u>. $z(x;y)=x^3y^5$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Мы приведем два варианта решения этого примера – первый вариант для студента, который еще не вполне уверенно овладел навыками вычисления частных производных, и второй вариант для студентов, для которых вычисление частных производных не является серьезной проблемой.

Начнем с первого варианта. На всякий случай мы напомним некоторые факты, которые должны быть известны студенту после изучения раздела курса высшей математики, касающегося дифференцирования функции одной переменной. Во-первых – производная произведения $(uv)'=u'v+uv'$. Во-вторых – табличную производную $(x^n)'=nx^{n-1}$. В-третьих – для сложной функции $y=u^n$, где $u=u(x)$ имеем $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$.

Обратим внимание на тот факт, что исходная функция представляет собой произведение двух функций: первая - x^3, вторая - y^5.

Используя формулу производной произведения, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y^5\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right)y^5+x^3\frac{\partial}{\partial x}\left(y^5\right).$$

Далее воспользуемся правилами вычисления производной степенной и сложной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right)y^5+x^3\frac{\partial}{\partial x}\left(y^5\right)=3x^2\frac{\partial x}{\partial x}y^5+x^3 5y^4\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Поскольку $\frac{\partial x}{\partial x}=1$, $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, то получаем окончательный ответ $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^5$.

Аналогично вычисляется $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^5\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3\right)y^5+x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(y^5\right)=3x^2\frac{\partial x}{\partial y}y^5+x^3 5y^4\frac{\partial y}{\partial y}=5x^3y^4.$$

Теперь **рассмотрим второй вариант решения этой задачи для студента, твердо овладевшего навыками вычисления частных производных**.

При вычислении частной производной по переменной x он заметит, что y^5 является постоянной величиной, а постоянную величину можно выносить за знак производной. Поэтому имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y^5\right)=y^5\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right)=y^5 3x^2=3x^2y^5.$$

Аналогично, при вычислении частной производной по переменной y он заметит, что x^3 является постоянной величиной, а постоянную величину можно выносить за знак производной. Поэтому имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^5\right)=x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(y^5\right)=x^3 5y^4=5x^3y^4.$$

<u>Задача 2</u> $z(x;y)=\frac{x^7}{y^4}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Первый вариант решения. На всякий случай напомним производную частного. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^7}{y^4}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^7)y^4-x^7\frac{\partial}{\partial x}(y^4)}{\left(y^4\right)^2}=\frac{7x^6\frac{\partial x}{\partial x}y^4-x^7 4y^3\frac{\partial y}{\partial x}}{y^8}=\frac{7x^6y^4}{y^8}=\frac{7x^6}{y^4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^7}{y^4}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^7)y^4-x^7\frac{\partial}{\partial y}(y^4)}{\left(y^4\right)^2}=\frac{7x^6\frac{\partial x}{\partial y}y^4-x^7 4y^3\frac{\partial y}{\partial y}}{y^8}=\frac{-4x^7y^3}{y^8}=-\frac{4x^7}{y^5}$$

Второй вариант решения. При вычислении частной производной по x заметим, что $\frac{1}{y^4}$ является постоянным множителем. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^7}{y^4}\right)=\frac{1}{y^4}\frac{\partial}{\partial x}(x^7)=\frac{1}{y^4}7x^6=\frac{7x^6}{y^4}.$$

Аналогично при вычислении частной производной по y заметим, что x^7 является постоянным множителем. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^7}{y^4}\right)=x^7\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^4}\right)=x^7\frac{\partial}{\partial y}(y^{-4})=x^7(-4)y^{-5}=-\frac{4x^7}{y^5}.$$

Перейдем непосредственно к решению более сложных примеров.

<u>Задача 3.</u> Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}$.

Решение этого примера приведем по первому варианту. Напомним табличную формулу производной функции одной переменной. $\left(e^x\right)'=e^x$. Для сложной функции $y=e^u$, где $u=u(x)$,

имеем: $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(e^u)=e^u\frac{du}{dx}$.Напомним также $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\right)=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^5}{\sqrt{y}}\right)=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^5)\sqrt{y}-x^5\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{y})}{(\sqrt{y})^2}=$$

$$=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{5x^4\frac{\partial x}{\partial x}\sqrt{y}-x^5\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial y}{\partial x}}{y}=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{5x^4\sqrt{y}}{y}=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{5x^4}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\right)=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^5}{\sqrt{y}}\right)=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^5)\sqrt{y}-x^5\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y})}{(\sqrt{y})^2}=$$

$$=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{5x^4\frac{\partial x}{\partial y}\sqrt{y}-x^5\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial y}{\partial y}}{y}=e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{(-1)x^5\frac{1}{2\sqrt{y}}}{y}=-e^{\frac{x^5}{\sqrt{y}}}\frac{x^5}{2\sqrt{y^3}}.$$

<u>Задача 4.</u> Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = x^y$.

Решение примера проведем по второму варианту.
При вычислении частной производной по x, считая y постоянной, воспользуемся табличной производной $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y\right) = yx^{y-1}$.

При вычислении частной производной по y, считая x постоянной, воспользуемся табличной производной $(a^x)' = a^x \ln a$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y\right) = x^y \ln x$.

При решении задачи аудиторной контрольной работы используются формулы нахождения частных производных сложных функций. Напомним эти формулы. В курсе дифференциального исчисления функций одной переменной для нахождения производных сложных функций использовалось следующее правило. Суть этого правила состоит в следующем. Если переменная величина y является некоторой функцией переменной u ($y = F(u)$), а переменная u является в свою очередь функцией другой переменной x ($u = \varphi(x)$), то переменная y является функцией x ($y = F[\varphi(x)]$). Для вычисления производной этой функции по x использовалась следующая формула $y' = F'(u)\varphi'(x)$ или ей аналогичная $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$. Условия применимости этой формулы были изложены в теоретическом курсе и на них мы останавливаться не будем.

Соответствующие формулы существуют и для функций нескольких переменных. Мы не будем останавливаться на условиях применимости этих формул. С ними вы можете ознакомиться при изучении теоретической части курса. Для функций двух переменных эти формулы выглядят следующим образом.

Пусть переменная z является функцией двух переменных u и v, то есть $z = z(u;v)$. Переменные u и v в свою очередь являются функциями двух других переменных x и y, то есть $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$. Тогда для вычисления частных производных по x и y могут быть использованы следующие формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Перейдем непосредственно к решению конкретных задач. Мы будем исходить из того, что, решив первую задачу, вы уже овладели некоторыми навыками вычисления частных производных.

Задача 5. Применяя правило нахождения производных сложных функций, найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)$, где $u = (x^3 + y^2)$, $v = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

Используем приведенные выше формулы. (**Напомним** $(\sin x)' = \cos x$).

Решение приведем, предполагая, что вы еще не вполне твердо владеете навыками нахождения частных производных.

Вначале вычислим отдельно $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left[\sin\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\right] = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^4}{v^2}\right) = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{\frac{\partial}{\partial u}(u^4)v^2 - u^4\frac{\partial}{\partial u}(v^2)}{v^4} =$$

$$= \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{4u^3\frac{\partial u}{\partial u}v^2 - u^4 2v\frac{\partial v}{\partial u}}{v^4} = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{4u^3(1)v^2 - u^4 2v(0)}{v^4} = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{4u^3}{v^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left[\sin\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\right] = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^4}{v^2}\right) = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{\frac{\partial}{\partial v}(u^4)v^2 - u^4\frac{\partial}{\partial v}(v^2)}{v^4} =$$

$$= \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{4u^3\frac{\partial u}{\partial v}v^2 - u^4 2v\frac{\partial v}{\partial v}}{v^4} = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{4u^3(0)v^2 - u^4 2v(1)}{v^4} = \cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{(-2)u^4}{v^3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 3x^2\frac{\partial x}{\partial x} + 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 1 + 2y0 = 3x^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 3x^2\frac{\partial x}{\partial y} + 2y\frac{\partial y}{\partial y} = 3x^2 0 + 2y1 = 2y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + xy + y^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + xy + y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy + y^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + xy + y^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2)\right) =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}\left(2x\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial x}y+x\frac{\partial y}{\partial x}+2y\frac{\partial y}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}\left(2x1+1y+x0+2y0\right)=\frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+xy+y^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+xy+y^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}\left(2x\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial y}y+x\frac{\partial y}{\partial y}+2y\frac{\partial y}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}\left(2x0+0y+x1+2y1\right)=\frac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}.$$

Теперь можем записать окончательный ответ.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{4u^3}{v^2}\;3x^2+\cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{(-2)u^4}{v^3}\;\frac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{4u^3}{v^2}\;2y+\cos\left(\frac{u^4}{v^2}\right)\frac{(-2)u^4}{v^3}\;\frac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}.$$

Возможные дальнейшие упрощения полученных соотношений, мы опускаем.

Замечание. По опыту проверки работ иногда приходится сталкиваться с таким методом нахождения частных производных в данной задаче. Студент с самого начала подставляет u и v, выраженные через x и y в исходную функцию и получает функцию, зависящую только от x и y. В рассмотренной задаче это выглядело бы следующим образом

$$z=\sin\left[\frac{\left(x^3+y^2\right)^4}{\left(\sqrt{x^2+xy+y^2}\right)^3}\right].$$

Далее, используя обычные правила нахождения частных производных, решается задача. С точки зрения практики (если, конечно, сам вид подобного примера не вызывает у вас отрицательных эмоций), такой прием возможен и найденные частные производные будут верными. Однако при решении контрольной работы это неприемлемо, поскольку в условии задания написано «**Применяя правило нахождения производных сложных функций,** найти ….».

Рассмотрим решение еще одного примера, но теперь глазами студента уверенно овладевшего навыками вычисления частных производных.

Задача 6. Применяя правило нахождения производных сложных функций, найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln\left(u^4+v^5\right)$, где $u=x^3y^2$, $v=\frac{y}{x^6}$.

(Напомним $\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$).

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left[\ln\left(u^4+v^5\right)\right]=\frac{1}{u^4+v^5}\left[\frac{\partial}{\partial u}(u^4)+\frac{\partial}{\partial u}(v^5)\right]=\frac{1}{u^4+v^5}(4u^3+0)=\frac{4u^3}{u^4+v^5}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left[\ln\left(u^4+v^5\right)\right]=\frac{1}{u^4+v^5}\left[\frac{\partial}{\partial v}(u^4)+\frac{\partial}{\partial v}(v^5)\right]=\frac{1}{u^4+v^5}(0+5v^4)=\frac{5v^4}{u^4+v^5}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y^2\right)=y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right)=y^2 3x^2=3x^2y^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2\right)=x^3\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)=x^3 2y=2x^3y.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^6}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-6}\right)=y(-6)x^{-7}=-\frac{6y}{x^7}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^6}\right)=\frac{1}{x^6}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\right)=\frac{1}{x^6}.$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4u^3}{u^4+v^5}\,3x^2y^2+\frac{5v^4}{u^4+v^5}\left(-\frac{6y}{x^7}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{4u^3}{u^4+v^5}\,2x^3y+\frac{5v^4}{u^4+v^5}\,\frac{1}{x^6}.$$

Следующий тип задач предполагает знание формулы вычисления полной производной функции. Поясним смысл этой задачи. Предположим, что задана функция трех переменных $z=z(x;y;t)$. При этом, переменные x и y не являются независимыми, а являются некоторыми функциями переменной t. Тогда фактически величина z является функцией одной переменной t. Производная этой функции по переменной t и называется полной производной и обозначается $\frac{dz}{dt}$. Формула ее вычисления имеет вид:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Рассмотрим примеры. При решении примеров мы исходим из того факта, что, решив первые две задачи, вы овладели навыками вычисления частных производных.

<u>Задача 7.</u> Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \cos\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)$, где $x = e^{4t}$, $y = tg2t$.

Найдем вначале $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$. (Напомним $(\cos x)' = -\sin x$, $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\right] = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right) = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^6\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\left(3x^2 + 0\right) = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{3x^2}{t^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\right] = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right) = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + y^6\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{1}{t^2}\left(0 + 6y^5\right) = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{6y^5}{t^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\cos\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\right] = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right) = -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\left(x^3 + y^6\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^2}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\left(x^3 + y^6\right)\frac{(-2)}{t^3} = \sin\left(\frac{x^3 + y^6}{t^2}\right)\frac{2\left(x^3 + y^6\right)}{t^3}.$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{4t}\right) = e^{4t}4.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(tg2t) = \frac{1}{\cos^2 2t}2.$$

Тогда получаем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=$$
$$-\sin\left(\frac{x^3+y^6}{t^2}\right)\frac{3x^2}{t^2}\,e^{4t}4-\sin\left(\frac{x^3+y^6}{t^2}\right)\frac{6y^5}{t^2}\,\frac{1}{\cos^2 2t}2+\sin\left(\frac{x^3+y^6}{t^2}\right)\frac{2\left(x^3+y^6\right)}{t^3}.$$

__Задача 8.__ Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=arctg\left(x^4y^2t^5\right)$, где $x=\sin 3t$, $y=e^{2t}$. (Напомним $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[arctg\left(x^4y^2t^5\right)\right]=\frac{1}{1+\left(x^4y^2t^5\right)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4y^2t^5\right)=\frac{1}{1+x^8y^4t^{10}}\,y^2t^5\,\frac{\partial}{\partial x}(x^4)=$$
$$=\frac{1}{1+x^8y^4t^{10}}\,y^2t^5\,4x^3=\frac{4x^3y^2t^5}{1+x^8y^4t^{10}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[arctg\left(x^4y^2t^5\right)\right]=\frac{1}{1+\left(x^4y^2t^5\right)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^4y^2t^5\right)=\frac{1}{1+x^8y^4t^{10}}\,x^4t^5\,\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=$$
$$=\frac{1}{1+x^8y^4t^{10}}\,x^4t^5\,2y=\frac{2x^4yt^5}{1+x^8y^4t^{10}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[arctg\left(x^4y^2t^5\right)\right]=\frac{1}{1+\left(x^4y^2t^5\right)^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(x^4y^2t^5\right)=\frac{1}{1+x^8y^4t^{10}}\,x^4y^2t^5\,\frac{\partial}{\partial t}(t^5)=$$
$$=\frac{1}{1+x^8y^4t^{10}}\,x^4y^2\,5t^4=\frac{5x^4y^2t^4}{1+x^8y^4t^{10}}.$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sin 3t\right)=3\cos 3t.$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)=e^{2t}2.$$

Тогда
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{4x^3y^2t^5}{1+x^8y^4t^{10}}\,3\cos 3t+\frac{2x^4yt^5}{1+x^8y^4t^{10}}\,e^{2t}2+\frac{5x^4y^2t^4}{1+x^8y^4t^{10}}.$$

В процессе решения следующих задач используется понятие производной по направлению. Напомним суть этого понятия. Пусть имеется функция трех переменных $u = u(x; y; z)$ и некоторая точка пространства $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Производной $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a}$ называется следующий предел

$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y; z_0 + \Delta z) - u(x_0; y_0; z_0)}{\Delta s}$, где Δs длина вектора $\overrightarrow{M_0 M_1}$, соединяющего точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и $M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y; z_0 + \Delta z)$, при этом сам вектор $\overrightarrow{M_0 M_1}$ параллелен вектору $\vec{a}$ и имеет с этим вектором одинаковое направление. Производная по направлению характеризует скорость изменения функции в направлении вектора $\vec{a}$. При вычислении производной по направлению удобно использовать понятие градиента функции.

Градиентом функции $u = u(x; y; z)$ называется вектор, обозначаемый **grad(**u), который определяется следующими соотношениями **grad(**u)=$\left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. Производная по направлению вектора $\vec{a}$ равна проекции градиента функции на это направление. Таким образом, можно сказать, что **grad(**u) направлен в направлении наиболее быстрого возрастания функции, а его модуль равен скорости роста в этом направлении.

Напомним формулу проекции вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, которая изучалась в курсе аналитической геометрии $np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{b}|}$, где $(\vec{a}\vec{b})$ - скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{b}|$ - модуль вектора $\vec{b}$. Напомним, что если в прямоугольной декартовой системе координат координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $\vec{a} = \{X_1; Y_1; Z_1\}$, $\vec{b} = \{X_2; Y_2; Z_2\}$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле $(\vec{a}\vec{b}) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$.

Следовательно, если координаты вектора $\vec{a}$ соответственно равны $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, то производная по направлению вектора $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} a_x + \frac{\partial u}{\partial y} a_y + \frac{\partial u}{\partial z} a_z}{\sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}}.$$

<u>Задача 9.</u> Дана функция $u = x^2 y + y^2 z + z^2 x$.

Найти: а) градиент функции; б) производную по направлению вектора $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$ в точке М(3;1;2).

Найдем градиент u.

grad(u)=$\left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. Вычислим частные производные.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)=2xy+z^2 .$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)=x^2+2yz .$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)=y^2+2zx .$$

Тогда

grad(u)=$\{2xy+z^2;x^2+2yz;y^2+2zx\}$.

Полагая x=3, y=1, z=2, получаем **grad(**u)=$\{10;13;13\}$.

Используя формулу $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\left(gradu\cdot\vec{a}\right)}{|\vec{a}|}$, получаем $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{10\cdot 2+13\cdot(-1)+13\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{33}{3}=11$.

В следующей задаче изучаются методы построения касательной плоскости и нормали к поверхности. Напомним основные моменты теоретического курса. Если поверхность определяется уравнением $\Phi(x;y;z)=0$, и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ лежит на указанной поверхности, то вектор $\vec{N}=\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x};\frac{\partial\Phi}{\partial y};\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\}$, вычисленный в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярен касательной плоскости к поверхности. Тогда уравнение касательной плоскости может быть записано в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(z-z_0)=0 .$$

Уравнение нормали, записанное в каноническом виде, определяется соотношениями

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}} .$$

<u>Задача 10.</u> Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $xy^2+yz^2+xyz-28=0$ в точке M(1;2;3).

Имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy^2+yz^2+xyz-28\right)=y^2+yz=10 ;$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^2+yz^2+xyz-28\right)=2xy+z^2+xz=16 ;$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2+yz^2+xyz-28\right)=2yz+xy=14 .$$

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид

10(x-1)+16(y-2)+14(z-3)=0.

Преобразуя это уравнение, получаем окончательный вид

5x+8y+7z-42=0.

Каноническое уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-1}{10}=\frac{y-2}{16}=\frac{z-3}{14}$$

Теперь рассмотрим задачи, связанные с применением полного дифференциала в приближенных вычислениях. Суть этого состоит в приближенной замене полного приращения функции ее полным дифференциалом. (Напомним, что полный дифференциал dz функции двух переменных $z(x;y)$ равен $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$). Для приближенных вычислений применяется формула

$$z(x+\Delta x;y+\Delta y)\approx z(x;y)+dz=z(x;y)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Рассмотрим пример применения данной формулы.

<u>Задача 11.</u> Вычислить приближенно с помощью дифференциала первого порядка $\sqrt{4{,}02^2+2{,}97^2}$.

Рассмотрим функцию $z(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$. В указанном примере требуется вычислить значение функции в точке $M_1(x_1;y_1)$, координаты которой соответственно равны $x_1=4{,}02$, $y_1=2{,}97$.

Рассмотрим близкую точку $M_0(x_0;y_0)$, в которой вычисление функции не представляет проблему. В качестве такой точки возьмем $M_0(4;3)$, то есть $x_0=4$, $y_0=3$. Тогда $\Delta x=4{,}02-4=0{,}02$, $\Delta y=2{,}97-3=-0{,}03$.

Имеем $z(x+\Delta x;y+\Delta y)\approx z(x;y)+dz=z(x;y)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Поскольку $z(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$, то $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тогда

$$\sqrt{(x_0+\Delta x)^2+(y_0+\Delta y)^2}\approx\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}+\frac{x_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}\Delta x+\frac{y_0}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}\Delta y.$$

Поскольку $x_0=4$, $y_0=3$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=-0{,}03$,

то $\sqrt{4{,}02^2+2{,}97^2}=$

$$=\sqrt{(4+0{,}02)^2+(3-0{,}03)^2}\approx\sqrt{4^2+3^2}+\frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}0{,}02+\frac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}(-0{,}03)=$$

$$=5+\frac{0{,}08-0{,}09}{5}=4{,}998.$$

Далее ознакомимся с методами вычисления полных дифференциалов высших порядков. Общее правило для вычисления $d^n z$ - полного дифференциала порядка n выглядит следующим образом

$$d^n z = d(d^{n-1}z) \ .$$

Напомним, что полный дифференциал первого порядка определяется соотношением $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

<u>Задача 12.</u> Найти $d^2 z$, если $z = x\sin\left(\frac{x}{y}\right)$.

Согласно приведенной выше формуле **полный дифференциал второго порядка равен полному дифференциалу от полного дифференциала первого порядка.**
Найдем полный дифференциал первого порядка.

$$dz = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx + \frac{\partial}{\partial y}\left[x\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy = \left[\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx + \left[-\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy$$

Далее найдем полный дифференциал второго порядка

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx + \left[-\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy\right\}dx +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx + \left[-\frac{x^2}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy\right\}dy =$$

$$=\left\{\left[\frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx + \left[-\frac{2x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy\right\}dx +$$

$$+\left\{\left[-\frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)\sin\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]dx + \left[\frac{2x^2}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^3}{y^4}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy\right\}dy .$$

Группируя слагаемые, получаем

$$d^2 z = \left\{\frac{2}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right\}dx^2 + 2\left\{\left[-\frac{2x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^3}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right]\right\}dxdy +$$

$$+\left\{\frac{2x^2}{y^3}\cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^3}{y^4}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right\}dy^2 .$$

Далее ознакомимся с методами исследования функции двух переменных на экстремум. Напомним некоторые основные моменты теории.

Пусть имеется функция двух переменных $z = z(x; y)$. Точками экстремума могут являться только такие точки, в которых частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ или равны нулю или не существуют. Такие точки плоскости будем называть критическими. Следовательно, для определения критических точек имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Однако указанные условия не являются достаточными условиями экстремума. Для проверки, является ли критическая точка точкой экстремума, используется следующая схема. Обозначим через A, B, C следующие значения вторых производных, вычисленных в критической точке:

$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Тогда:

1. Если $AC - B^2 > 0$, то исследуемая критическая точка является точкой экстремума и
в случае $A > 0$ - исследуемая точка является точкой минимума
в случае $A < 0$ - исследуемая точка является точкой максимума;

2. Если $AC \_ B^2 < 0$, то исследуемая точка не является точкой экстремума.

3. Если $AC - B^2 = 0$, то данный метод ответа на поставленный вопрос не дает и требуется привлекать другие методы.

Задача 12. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Вычислим частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Для определения критических точек имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0; \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0; \\ 3y^2 - 3x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0; \\ y^2 - x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y; \\ y^2 = x. \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0.$$

Полученное уравнение для неизвестной x имеет два корня $x_1 = 0, x_2 = 1$. Поскольку $y = x^2$, то $y_1 = 0, y_2 = 1$.

Следовательно, критическими являются две точки плоскости $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

Определим, являются ли эти точки точками экстремума. Для этого вычислим вторые производные.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y) = 6x.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y) = -3.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - 3x) = 6y.$$

Исследуем первую точку $M_1(0;0)$.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot 0 = 0,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \cdot 0 = 0.$$

Тогда $AC - B^2 = -9 < 0$, следовательно, $M_1(0;0)$ не является точкой экстремума.

Исследуем вторую точку $M_2(1;1)$.

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \cdot 1 = 6,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,\ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6 \cdot 1 = 6.$$

Тогда $AC - B^2 = 27 > 0$, следовательно, $M_2(1;1)$ является точкой экстремума. Поскольку A=6>0, то эта точка является точкой минимума.

Задача 14. Исследовать на экстремум функцию $z = -x^2 + xy - 2y^2 + 3x + 2y$.

Вычислим частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + y + 3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 2.$$

Для определения критических точек имеем систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0, \\ x - 4y + 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 3, \\ x - 4y = -2. \end{cases}$$

Используя формулы Крамера, получаем $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -14$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7$, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1$. Следовательно, критической точкой является точка M(2;1).

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-2x + y + 3) = -2, \qquad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x + y + 3) = 1,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(x - 4y + 2) = -4.$$

Тогда $AC - B^2 = 7 > 0$, следовательно, $M(2;1)$ является точкой экстремума. Поскольку $A = -2 < 0$, то эта точка является точкой максимума.

Некоторые задачи связаны с нахождением условного экстремума функции и нахождению наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области.

Начнем с рассмотрения задачи условного экстремума.

Пусть имеется функция двух переменных $z = f(x;y)$. Требуется определить точки экстремума этой функции при условии, что переменные x и y не являются независимыми, а связаны соотношением $\varphi(x:y) = 0$. Фактически это означает, что мы исследуем функцию $z = f(x;y)$ не на всей плоскости, а на некоторой линии, лежащей на этой плоскости.

Для решения этой задачи используется метод множителей Лагранжа. Введем функцию трех переменных $F(x;y;\lambda)$ следующим образом $F(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda\varphi(x;y)$. (λ – называют множителем Лагранжа). Тогда точки экстремума определяются из решения системы трех уравнений с тремя неизвестными x, y, λ вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

<u>Задача 15.</u> Найти условный экстремум функции $z = x^2 + xy + y^2$, если $x^2 + y^2 = 4$.

Прежде чем составить выражение для функции Лагранжа, уравнение связи между переменными x и y перепишем в виде $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Тогда выражение для функции Лагранжа имеет вид

$F(x;y;\lambda) = x^2 + xy + y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4\right)$.

Из условия $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$ получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x + y + 2\lambda x = 0, \\ x + 2y + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$

Первые два уравнения системы перепишем в виде $\begin{cases} 2(1+\lambda)x + y = 0, \\ x + 2(1+\lambda)y = 0. \end{cases}$, и будем рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y. Данная система является однородной системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Она всегда допускает нулевое решение. Ненулевое решение такой системы существует только тогда, когда определитель системы равен нулю. Условие равенства нулю определителя системы дает уравнение для определения λ.

Имеем $\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & 1 \\ 1 & 2(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0$. Вычисляя определитель, получаем уравнение $4(1+\lambda)^2 - 1 = 0$. Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Рассмотрим вначале $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. Подставляя в первое уравнение системы, получаем $2x + y + 2\lambda x = 0$, $2x + y + 2\left(-\frac{1}{2}\right)x = 0$, $x + y = 0$, $y = -x$.

Тогда из последнего уравнения системы следует: $x^2 + y^2 - 4 = 0$; $x^2 + (-x)^2 - 4 = 0$; $2x^2 = 4$; $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$. Из условия $y = -x$ находим $y_1 = -\sqrt{2}, y_2 = \sqrt{2}$. Следовательно, значению $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ соответствуют две точки плоскости $M_1(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ и $M_2(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Аналогично рассмотрим $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Из первого уравнения системы следует $2x + y + 2\lambda x = 0$, $2x + y + 2\left(-\frac{3}{2}\right)x = 0$, $-x + y = 0$, $y = x$. Тогда из последнего уравнения системы следует: $x^2 + y^2 - 4 = 0$; $x^2 + (x)^2 - 4 = 0$; $2x^2 = 4$; $x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$. Из условия $y = x$ находим $y_3 = \sqrt{2}, y_4 = -\sqrt{2}$. Следовательно, значению $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ соответствуют две точки плоскости $M_3(\sqrt{2};\sqrt{2})$ и $M_4(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$.

Вычислим значения функции в этих точках.

$M_1(\sqrt{2};-\sqrt{2})$. $f(x;y) = (\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})^2 = 2$.

$M_2(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. $f(x;y) = (-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 2$.

$M_3(\sqrt{2};\sqrt{2})$. $f(x;y) = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 6$.

$M_4(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$. $f(x;y) = (-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})^2 = 6$.

Следовательно, точки $M_1(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ и $M_2(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ являются точками минимума, а точки $M_3(\sqrt{2};\sqrt{2})$ и $M_4(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ - являются точками максимума.

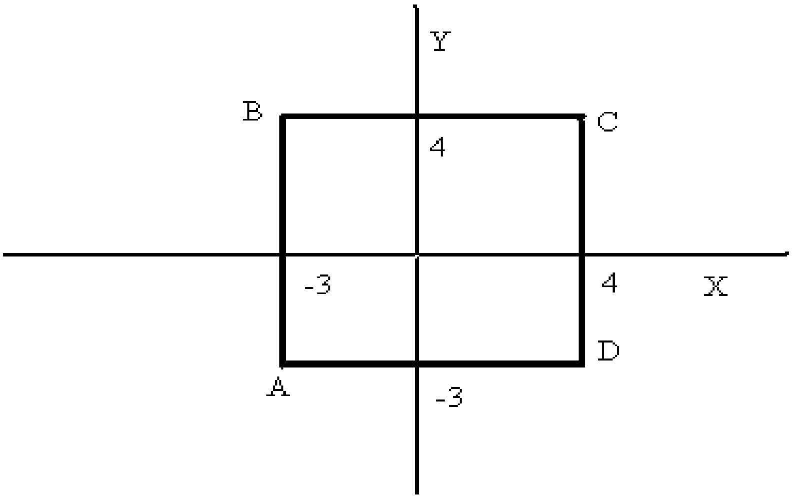
Далее рассмотрим задачу нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой ограниченной области. Известно, что непрерывная функция в замкнутой ограниченной области **принимает** свое наибольшее и наименьшее значения. Если соответствующая точка лежит внутри области, то такая точка является точкой экстремума. Если такая точка лежит на границе, то она является точкой условного экстремума. Тогда можно предложить следующую схему.

1.Находим критические точки, лежащие внутри области.

2.Находим точки условного экстремума, лежащие на границе.

3. Вычисляем значения функции в найденных точках, и определяем наибольшее и наименьшее значения.

<u>Задача 16.</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10x + 10y$ в области, ограниченной линиями: $x = -3$, $y = -3$, $x = 4$, $y = 4$.



Схематично область изображена на рисунке.

1. Найдем точки экстремума функции.

Из условия $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ получаем систему уравнений.

$$\begin{cases} 6x + 2y + 10 = 0, \\ 2x + 4y + 10 = 0. \end{cases}, \quad \begin{cases} 6x + 2y = -10, \\ 2x + 4y = -10. \end{cases}$$

Решаем эту систему. $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = -20$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = -40$, $x = -1$, $y = -2$. Найденная точка $M_1(-1,-2)$ лежит внутри области, поэтому она находится среди точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения.

2. Далее исследуем границу области. Она состоит из четырех линий, каждую из которых исследуем отдельно.

Линия АВ. Ее уравнение $x = -3$ или $x + 3 = 0$. (Заметим, что $-3 \le y \le 4$). Составляем функцию Лагранжа.

$$F(x; y; \lambda) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10x + 10y + \lambda(x + 3).$$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6x + 2y + 10 + \lambda = 0, \\ 2x + 4y + 10 = 0, \\ x + 3 = 0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $x = -3$. Тогда из второго уравнения следует $y = -1$. Точка $M_2(-3;-1)$ лежит на линии АВ, поэтому она ходит в число тех точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения. Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии АВ. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки A(-3;-3) и $B(-3;4)$. Чтобы сохранить единую систему обозначений обозначим $M_3(-3;-3)$ и $M_4(-3;4)$.

Аналогично исследуем участок границы BC. Линия BC. Ее уравнение $y=4$ или $y-4=0$. (Заметим, что $-3 \le x \le 4$). Составляем функцию Лагранжа.

$$F(x;y;\lambda) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10x + 10y + \lambda(y-4).$$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x}=0, \frac{\partial F}{\partial y}=0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6x+2y+10=0, \\ 2x+4y+10+\lambda=0, \\ y-4=0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $y=4$. Тогда из первого уравнения следует $x=-3$. Точка $M(-3;4)$ лежит на линии AB, поэтому она ходит в число тех точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения, но она совпадает с точкой B и в число возможных точек включена ранее. Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии BC. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки $B(-3;4)$ и C(4;4). Точка B включена уже ранее. Обозначим $M_5(4;4)$.

Линия CD. Ее уравнение $x=4$ или $x-4=0$. (Заметим, что $-3 \le y \le 4$). Составляем функцию Лагранжа.

$$F(x;y;\lambda) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10x + 10y + \lambda(x-4).$$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x}=0, \frac{\partial F}{\partial y}=0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6x+2y+10+\lambda=0, \\ 2x+4y+10=0, \\ x-4=0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $x=4$. Тогда из второго уравнения следует $y=-\frac{9}{2}$. Точка $M\left(4;-\frac{9}{2}\right)$ не лежит на линии CD. Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии CD. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки C(4;4) и D(4;-3). Точка C включена уже ранее. Обозначим $M_6(4;-3)$.

Линия AD. Ее уравнение $y=-3$ или $y+3=0$. (Заметим, что $-3 \le x \le 4$). Составляем функцию Лагранжа.

$$F(x;y;\lambda) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10x + 10y + \lambda(y+3).$$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x}=0, \frac{\partial F}{\partial y}=0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 6x + 2y + 10 = 0, \\ 2x + 4y + 10 + \lambda = 0, \\ y + 3 = 0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $y = -3$. Тогда из первого уравнения следует $x = -\frac{2}{3}$. Точка $M_7\left(-\frac{2}{3};-3\right)$ лежит на линии AB, поэтому она ходит в число тех точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения. Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии AD. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки A и D. Отметим, что эти точки включены уже ранее.

Вычислим значения функции $z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10x + 10y$ в найденных точках.

Точка $M_1(-1,-2)$ $z(-1;-2) = z_1 =$ -15.
Точка $M_2(-3;-1)$ $z(-3;-1) = z_2 =$ -5.
Точка $M_3(-3;-3)$ $z(-3;-3) = z_3 = 3$.
Точка $M_4(-3;4)$ $z(-3;4) = z_4 = 45$.
Точка $M_5(4;4)$ $z(4;4) = z_5 = 192$.
Точка $M_6(4;-3)$ $z(4;-3) = z_6 = 52$.
Точка $M_7\left(-\frac{2}{3};-3\right)$ $z\left(-\frac{2}{3};-3\right) = z_7 = -\frac{40}{3}$.

Следовательно, наименьшее значение функции равно (-15) и достигается в точке $M_1(-1,-2)$, а наибольшее равно (192) и достигается в точке $M_5(4;4)$.

В заключении приведем образец выполнения варианта контрольной работы.

Задача 17.. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = tg\,\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(tg\,\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^5\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}\cdot\frac{5x^4}{\sqrt[3]{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(tg\,\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}\cdot x^5\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}\cdot\left(-\frac{x^5}{3\sqrt[3]{y^4}}\right).$$

Ответ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{5x^4}{\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^5}{3\sqrt[3]{y^4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x^5}{\sqrt[3]{y}}}$$

Задача 18. Применяя правило нахождения частных производных сложных функций, найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$z = \cos\frac{u^4}{v^5}$, где $u = \left(x^6 + y^4\right), v = e^{x^2+xy+2y^2}$.

Вычислим отдельно $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\left[\cos\left(\frac{u^4}{v^5}\right)\right]=-\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^4}{v^5}\right)=-\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)\frac{1}{v^5}\frac{\partial}{\partial u}(u^4)=$$

$$=-\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)\frac{4u^3}{v^5}=-\frac{4u^3}{v^5}\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left[\cos\left(\frac{u^4}{v^5}\right)\right]=-\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u^4}{v^5}\right)=-\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)u^4\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v^5}\right)=$$

$$==-\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)u^4\left(\frac{-5}{v^6}\right)=\frac{5u^4}{v^6}\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^6+y^4\right)=6x^5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^6+y^4\right)=4y^3;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+xy+2y^2}\right)=e^{x^2+xy+2y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy+2y^2)=e^{x^2+xy+2y^2}(2x+y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+xy+2y^2}\right)=e^{x^2+xy+2y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+2y^2)=e^{x^2+xy+2y^2}(x+4y)$$

Окончательный ответ:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{4u^3}{v^5}\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)6x^5+$$

$$+\frac{5u^4}{v^6}\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)e^{x^2+xy+2y^2}(2x+y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{4u^3}{v^5}\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)4y^3+$$

$$+\frac{5u^4}{v^6}\sin\left(\frac{u^4}{v^5}\right)e^{x^2+xy+2y^2}(x+4y).$$

Задача 19. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z=\sin\left(x^5y^3t^6\right)$, где $x=arctg3t, y=c\text{tg}5t$.

Найдем вначале $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial z}{\partial t},\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sin\left(x^5y^3t^6\right)\right]=\cos\left(x^5y^3t^6\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^5y^3t^6\right)=$$
$$=\cos\left(x^5y^3t^6\right)y^3t^6\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^5\right)=5x^4y^3t^6\cos\left(x^5y^3t^6\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\sin\left(x^5y^3t^6\right)\right]=\cos\left(x^5y^3t^6\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^5y^3t^6\right)=$$
$$=\cos\left(x^5y^3t^6\right)x^5t^6\,\frac{\partial}{\partial y}\left(y^3\right)=3x^5y^2t^6\cos\left(x^5y^3t^6\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\sin\left(x^5y^3t^6\right)\right]=\cos\left(x^5y^3t^6\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(x^5y^3t^6\right)=$$
$$=\cos\left(x^5y^3t^6\right)x^5y^3\,\frac{\partial}{\partial t}\left(t^6\right)=6x^5y^3t^5\cos\left(x^5y^3t^6\right).$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(arctg3t\right)=\frac{1}{1+9t^2}3.$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(c\text{tg}5t\right)=-\frac{1}{\sin^2 5t}5.$$

Тогда получаем

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=$$
$$=5x^4y^3t^6\cos\left(x^5y^3t^6\right)\frac{3}{1+9t^2}-3x^5y^2t^6\cos\left(x^5y^3t^6\right)\frac{5}{\sin^2 5t}+$$
$$+6x^5y^3t^5\cos\left(x^5y^3t^6\right).$$

Задача 20. Дана функция $u=x^2y^3+xyz$.

Найти: а) градиент функции;

б) производную функции в точке M(1; 1; 2) по направлению вектора $\vec{a}=\left\{2;-1;2\right\}$.

Найдем градиент u.

grad(u)=$\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$. Вычислим частные производные.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3+xyz\right)=2xy^3+yz.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3+xyz\right)=3x^2y^2+xz.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y^3+xyz\right)=xy.$$

Тогда

grad(u)=$\left\{2xy^3+yz;3x^2y^2+xz;xy\right\}$.

Полагая x=1, y=1, z=2, получаем **grad(**u)=$\left\{4;5;1\right\}$.

Для вычисления производной используем формулу $\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\left(gradu\cdot\vec{a}\right)}{|\vec{a}|}$. Получаем

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{4\cdot 2+5\cdot(-1)+1\cdot 2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{5}{3}.$$

<u>Задача 21.</u> Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2y+xz^2+zy^2-25=0$ в точке M(3; 2; 1).

Уравнение касательной плоскости может быть записано в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

Уравнение нормали, записанное в каноническом виде, определяется соотношениями

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}.$$

Имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+xz^2+zy^2-25\right)=2xy+z^2=13;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y+xz^2+zy^2-25\right)=x^2+2zy=13;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y+xz^2+zy^2-25\right)=2xz+y^2=10.$$

Тогда уравнение касательной плоскости имеет вид

13(x-3)+13(y-2)+10(z-1)=0.
Преобразуя это уравнение, получаем окончательный вид
13x+13y+10z-75=0.
Каноническое уравнение нормали имеет вид

$$\frac{x-3}{13}=\frac{y-2}{13}=\frac{z-1}{10}$$

Задача 22. Вычислить приближенно с помощью дифференциала первого порядка $\sqrt{1,99^3+1,03^2}$.

Рассмотрим функцию $z(x;y)=\sqrt{x^3+y^2}$. В указанном примере требуется вычислить значение функции в точке $M_1(x_1;y_1)$, координаты которой соответственно равны $x_1=1,99$, $y_1=1,03$.
Рассмотрим близкую точку $M_0(x_0;y_0)$, в которой вычисление функции не представляет проблему. В качестве такой точки возьмем $M_0(2;1)$, то есть $x_0=2$, $y_0=1$. Тогда $\Delta x=1,99-2=-0,01$, $\Delta y=1,03-1=0,03$.
Имеем $z(x+\Delta x;y+\Delta y)\approx z(x;y)+dz=z(x;y)+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Поскольку

$z(x;y)=\sqrt{x^3+y^2}$, то $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^3+y^2}}$. Тогда

$$\sqrt{(x_0+\Delta x)^3+(y_0+\Delta y)^2}\approx\sqrt{x_0{}^3+y_0{}^2}+\frac{3x_0{}^2}{2\sqrt{x_0{}^3+y_0{}^2}}\Delta x+\frac{y_0}{\sqrt{x_0{}^3+y_0{}^2}}\Delta y.$$

Поскольку $x_0=2$, $y_0=1$, $\Delta x=-0,01$, $\Delta y=0,03$, то

$$\sqrt{1,99^3+1,03^2}=\sqrt{(2-0,01)^3+(1+0,03)^2}\approx$$

$$\approx\sqrt{2^3+1^2}+\frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{2^3+1^2}}(-0,01)+\frac{1}{\sqrt{2^3+1^2}}(0,03)=$$

$$=3+\frac{-0,06+0,03}{3}=1,99.$$

Задача 23. Найти d^2z, если $z=e^{\frac{x^2}{y}}$.
Найдем полный дифференциал первого порядка.

$$dz=\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\frac{x^2}{y}}\right]dx+\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\frac{x^2}{y}}\right]dy=\left[e^{\frac{x^2}{y}}\frac{2x}{y}\right]dx+\left[-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{y}}\right]dy$$

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[e^{\frac{x^2}{y}}\frac{2x}{y}\right]dx + \left[-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{y}}\right]dy\right\}dx + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[e^{\frac{x^2}{y}}\frac{2x}{y}\right]dx + \left[-\frac{x^2}{y^2}e^{\frac{x^2}{y}}\right]dy\right\}dy =$$

$$\left\{\left[e^{\frac{x^2}{y}}\frac{4x^2}{y^2} + e^{\frac{x^2}{y}}\frac{2}{y}\right]dx + \left[-\frac{2x}{y^2}e^{\frac{x^2}{y}} - \frac{2x^3}{y^3}e^{\frac{x^2}{y}}\right]dy\right\}dx +$$

$$+\left\{\left[e^{\frac{x^2}{y}}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\frac{2x}{y} - e^{\frac{x^2}{y}}\left(-\frac{2x}{y^2}\right)\right]dx + \left[\frac{2x^2}{y^3}e^{\frac{x^2}{y}} + \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)e^{\frac{x^2}{y}}\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\right]dy\right\}dy$$

Группируя слагаемые, получаем

$$d^2z = \left[e^{\frac{x^2}{y}}\left(\frac{4x^2}{y^2} + \frac{2}{y}\right)\right]dx^2 - \left[4e^{\frac{x^2}{y}}\left(\frac{x}{y^2} + \frac{x^3}{y^3}\right)\right]dxdy +$$

$$+\left[e^{\frac{x^2}{y}}\left(\frac{2x^2}{y^3} + \frac{x^4}{y^4}\right)\right]dy^2$$

<u>Задача 24.</u> Исследовать на экстремум функцию

$z = -4x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 4y$.

Вычислим частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -8x + 2y + 2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y + 4.$$

Для определения критических точек имеем систему уравнений

$$\begin{cases} -8x + 2y + 2 = 0, \\ 2x - 2y + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 2y = 2, \\ 2x - 2y = -4. \end{cases}$$

Используя формулы Крамера, получаем $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -12$,

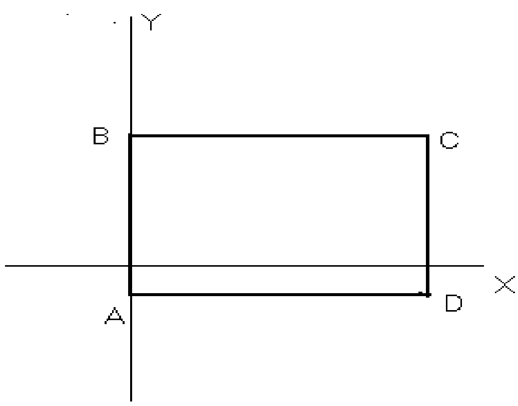
$\Delta_y = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -36$, $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 3$. Следовательно, критической точкой является точка M(1;3).

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-8x + 2y + 2) = -8,\ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-8x + 2y + 2) = 2,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 2y + 4) = -2.$$

Тогда $AC - B^2 = 12 > 0$, следовательно, $M(1;3)$ является точкой экстремума. Поскольку $A = -8 < 0$, то эта точка является точкой максимума.

Задача 25. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y$
в области, ограниченной линиями: x=0, y=–1, x=6, y=5.



Схематично область изображена на рисунке.
1. Найдем точки экстремума функции.
Из условия $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ получаем систему уравнений.

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}, \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Решаем эту систему. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$,

$x = 2$, $y = 1$. Найденная точка $M_1(2,1)$ лежит внутри области, поэтому она находится среди точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения.

2. Далее исследуем границу области. Она состоит из четырех линий, каждую из которых исследуем отдельно.

Линия АВ. Ее уравнение $x = 0$. (Заметим, что $-1 \le y \le 5$).

Составляем функцию Лагранжа.

$F(x;y;\lambda) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + \lambda x$.

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + y - 5 + \lambda = 0, \\ x + 2y - 4 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $x = 0$. Тогда из второго уравнения следует $y = 2$. Точка $M_2(0;2)$ лежит на линии АВ, поэтому она ходит в число тех точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения. Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии АВ. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки А(0;-1) и $B(0;5)$. Чтобы сохранить единую систему обозначений обозначим $M_3(0;-1)$ и $M_4(0;5)$.

Аналогично исследуем участок границы ВС. Линия ВС. Ее уравнение $y = 5$ или $y - 5 = 0$. (Заметим, что $0 \le x \le 6$). Составляем функцию Лагранжа.

$F(x;y;\lambda) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + \lambda(y - 5)$.

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 2y - 4 + \lambda = 0, \\ y - 5 = 0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $y = 5$. Тогда из первого уравнения следует $x = 0$. Точка $M\left(0;5\right)$ лежит на линии AB, поэтому она ходит в число тех точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения, но она совпадает с точкой B и в число возможных точек включена ранее. Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии BC. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки $B(0;5)$ и C(6;5). Точка B включена уже ранее. Обозначим $M_5(6;5)$.

Линия CD. Ее уравнение $x = 6$ или $x - 6 = 0$. (Заметим, что $-1 \le y \le 5$). Составляем функцию Лагранжа.

$F(x;y;\lambda) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + \lambda(x - 6).$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + y - 5 + \lambda = 0, \\ x + 2y - 4 = 0, \\ x - 6 = 0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $x = 6$. Тогда из второго уравнения следует $y = -1$. Точка $M\left(6;-1\right)$ лежит на границе линии CD. Обозначим $M_6(6;-1)$.

Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии CD. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки C(6;5) и D(6;-1). Точки C и D включены уже ранее.

Линия AD. Ее уравнение $y = -1$ или $y + 1 = 0$. (Заметим, что $0 \le x \le 6$). Составляем функцию Лагранжа.

$F(x;y;\lambda) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + \lambda(y - 1).$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 2y - 4 + \lambda = 0, \\ y + 1 = 0. \end{cases}$$

Найдем x и y. Из последнего уравнения системы следует $y = -1$. Тогда из первого уравнения следует $x = 3$. Точка $M_7(3;-1)$ лежит на линии AB, поэтому она ходит в число тех точек, в которых может достигаться наибольшее или наименьшее значения. Кроме того, наибольшее или наименьшее значения могут достигаться на границах линии AD. Поэтому в число возможных точек мы включаем точки A и D. Отметим, что эти точки включены уже ранее.
Вычислим значения функции $z = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 10x + 10y$ в найденных точках.

Точка $M_1(2,1)$ $z(2,1) = z_1 =$-7.
Точка $M_2(0;2)$ $z(0;2) = z_2 =$-4.
Точка $M_3(0;-1)$ $z(0;-1) = z_3 = 5$.
Точка $M_4(0;5)$ $z(0;5) = z_4 = 5$.
Точка $M_5(6;5)$ $z(6;5) = z_5 = 41$.
Точка $M_6(6;-1)$ $z(6;-1) = z_6 = 5$.
Точка $M_7(3;-1)$ $z(3;-1) = z_7 = -4$.
Следовательно, наименьшее значение функции равно (-7) и достигается в точке $M_1(2,1)$, а наибольшее равно (41) и достигается в точке $M_6(6;-1)$.

<u>Задача 26.</u> Найти условный экстремум функции $z = x^2 + y^2 + 3xy$, если $x^2 + y^2 = 2$.

Прежде чем составить выражение для функции Лагранжа, уравнение связи между переменными x и y перепишем в виде $x^2 + y^2 - 2 = 0$.
Тогда выражение для функции Лагранжа имеет вид
$F(x;y;\lambda) = x^2 + y^2 + 3xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right)$.

Из условия $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2\lambda x = 0, \\ 3x + 2y + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Первые два уравнения системы перепишем в виде $\begin{cases} 2(1+\lambda)x + 3y = 0, \\ 3x + 2(1+\lambda)y = 0. \end{cases}$, и будем рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y. Данная система является однородной системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Она всегда допускает нулевое решение. Ненулевое решение такой системы существует только тогда, когда определитель системы равен нулю. Условие равенства нулю определителя системы дает уравнение для определения λ.

Имеем $\begin{vmatrix} 2(1+\lambda) & 3 \\ 3 & 2(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0$. Вычисляя определитель, получаем уравнение $4(1+\lambda)^2 - 9 = 0$. Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{5}{2}$.

Рассмотрим вначале $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$. Подставляя в первое уравнение системы, получаем $2x + 3y + 2\lambda x = 0$, $2x + 3y + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)x = 0$, $3x + 3y = 0$, $y = -x$.

Тогда из последнего уравнения системы следует: $x^2 + y^2 - 2 = 0$; $x^2 + (-x)^2 - 2 = 0$; $2x^2 = 2$; $x_1 = 1, x_2 = -1$. Из условия $y = -x$ находим $y_1 = -1, y_2 = 1$. Следовательно, значению $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ соответствуют две точки плоскости $M_1(1;-1)$ и $M_2(-1;1)$.

Аналогично рассмотрим $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$. Из первого уравнения системы следует $2x + 3y + 2\lambda x = 0$, $2x + 3y + 2\left(-\frac{5}{2}\right)x = 0$, $-3x + 3y = 0$, $y = x$. Тогда из последнего уравнения системы следует: $x^2 + y^2 - 2 = 0$; $x^2 + (x)^2 - 2 = 0$; $2x^2 = 2$; $x_3 = 1, x_4 = -1$. Из условия $y = x$ находим $y_3 = 1, y_4 = -1$. Следовательно, значению $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ соответствуют две точки плоскости $M_3(1;1)$ и $M_4(-1;-1)$.

Вычислим значения функции в этих точках.

$M_1(1;-1)$. $f(x;y) = (1)^2 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1)^2 = -1$.

$M_2(-1;1)$. $f(x;y) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \cdot (1) + (1)^2 = -1$.

$M_3(1;1)$. $f(x;y) = (1)^2 + 3 \cdot (1) \cdot (1) + (1)^2 = 5$.

$M_4(-1;-1)$. $f(x;y) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1)^2 = 5$.

Следовательно, точки $M_1(1;-1)$ и $M_2(-1;1)$ являются точками минимума, а точки $M_3(1;1)$ и $M_4(-1;-1)$ - являются точками максимума.