

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ



КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Пономарев А.В.

ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ, 1 СЕМЕСТР

Методическое пособие для бакалавров

Москва 2012

Рецензент:

д.ф.-м.н., проф. Макин А.С.

Пономарев А.В.

Экзамен по математике, 1 семестр: методическое пособие для бакалавров.
М.:МГУПИ, 2012.

В данном методическом пособии рассмотрены вопросы подготовки к письменной части зачетов и экзаменов по математике в первом семестре для студентов занимающихся по системе бакалавриата. Библиогр: 4.

© Пономарев А.В.

© МГУПИ, 2012

Содержание

Введение	4
I. Алгебра и геометрия	4
II. Математический анализ	16
Литература	23

Введение

Целью данного пособия является помощь студентам в подготовке к сдаче зачетов и экзаменов по математике в первом семестре. Зачастую, непонятое на консультации решение задачи становится серьезной проблемой на пути успешной сдачи зачета или экзамена. Данное пособие призвано помочь студенту освоить решение задач и изложить некоторые теоретические сведения, необходимые для этого.

I. Алгебра и геометрия

Зачет или экзамен по курсу «Алгебра и геометрия» включает в себя задачи по линейной алгебре, векторной алгебре, аналитической геометрии (на плоскости и в пространстве) и комплексным числам. Задачи будут рассмотрены не в порядке следования в билете (который может меняться), а по тематике.

Вначале рассмотрим задачи, относящиеся к *линейной алгебре*.

Задача 1. Найти сумму элементов матрицы, полученной перемножением матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Для начала необходимо напомнить, что *матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов (одинаковой длины), сокращенно обозначаемая $A_{m \times n}$* . Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами*.

В нашей задаче необходимо посчитать произведение двух квадратных матриц 2-го порядка (количество строк совпадает с количеством столбцов и равно 2). Напомним, что *операция умножения двух матриц $A_{l \times k}$ и $B_{m \times n}$ возможна только в случае, когда число столбцов первой матрицы k равно числу строк второй матрицы m* . В нашем случае это условия выполняется. Отметим, что произведение матриц $A \times B$ обычно не равно $B \times A$ (которое иногда невозможно вычислить).

В результате вычисления произведения матриц $A_{l \times k}$ и $B_{m \times n}$ мы получим матрицу $C_{l \times n}$. Таким образом, размер результирующей матрицы зависит от размера исходных. В нашем случае это также будет квадратная матрица 2-го порядка.

Для получения значений элементов результирующей матрицы используется правило «строка на столбец» – элемент c_{ij} (стоящий в i -й строке j -го столбца) получается сложением произведений соответствующих элементов i -й строки первой матрицы и j -го столбца второй. Проиллюстрируем этот способ на примере, подходящем для нашей задачи:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Теперь, обладая необходимыми теоретическими знаниями, перейдем непосредственно к решению нашей задачи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Также, в нашей задаче необходимо найти сумму элементов результирующей матрицы, что и будет являться ответом:

$$19 + 22 + 43 + 50 = 134$$

Ответ: 134.

Задача 2. Найти сумму элементов матрицы, обратной $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Для начала, необходимо напомнить, что матрица A^{-1} называется обратной матрице A , если выполняется условие: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$, где E – единичная матрица (в которой по диагонали, идущей из верхнего левого угла (главная диагональ), стоят единицы, а остальные элементы равны нулю) того же порядка, что A и A^{-1} . Отметим, что можно получить обратную матрицу только к квадратной матрице A , определитель которой $\det A$ не равен нулю (невырожденная матрица).

Определителем (детерминантом) квадратной матрицы A называется сопоставленное ей, определенным образом, число $\det A$ (или Δ_A). Мы не будем детально рассматривать здесь методы нахождения определителей матриц различного порядка, являющиеся отдельной большой темой, и лишь покажем пример вычисления определителя матрицы 2-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

В нашем случае матрица является невырожденной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

Существуют различные способы нахождения обратной матрицы, мы посчитаем с помощью союзной матрицы. *Союзная матрица A^* – это транспонированная (отраженная, относительно главной диагонали) матрица, состоящая из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы A . Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} – это определитель матрицы, полученной из исходной матрицы A путем вычеркивания строки i и столбца j , в которых находится данный элемент, взятый со знаком плюс, если сумма $i + j$ четна, и минус – если нечетна.* Проиллюстрируем это на примере, найдем алгебраическое дополнение элемента a_{12} и покажем вид союзной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}); \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Для случая матрицы второго порядка, союзная матрица будет иметь вид (необходимо отметить, что определитель матрицы, состоящей из одного элемента $A = (a_{11})$ равен этому элементу $\det A = a_{11}$):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} A_{11} = a_{22}; & A_{12} = -a_{21}; \\ A_{21} = -a_{12}; & A_{22} = a_{11}; \end{matrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

В нашей задаче союзная матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} A_{11} = 4; & A_{12} = -3; \\ A_{21} = -2; & A_{22} = 1; \end{matrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Для расчета обратной матрицы необходимо воспользоваться формулой:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$

Подставим найденные значения и получим результат, для этого умножим каждый элемент матрицы на получившееся число:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

Для получения ответа, как и в предыдущей задаче, необходимо сложить элементы получившейся матрицы.

Ответ: 0.

Задача 3. Найти x , решив систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Решать данную задачу можно с помощью *формул Крамера* или *методом Гаусса*. Для систем уравнений, в которых не более 3 переменных удобно использовать формулы Крамера (для случая более 3 переменных этот способ связан с большими вычислительными трудностями). Рассмотрим систему из 3 уравнений с 3 неизвестными (в общем случае n уравнений с n неизвестными):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что из коэффициентов при неизвестных можно составить квадратную матрицу A , а из свободных членов матрицу B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы $\det A$ называется *определителем системы*, и если он отличен от нуля, то система уравнений называется *невыврожденной*. Определитель данной матрицы (3-го порядка) находится следующим образом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

В случае если система является невырожденной, мы можем воспользоваться формулами Крамера. Для этого необходимо предварительно посчитать определители, получаемые заменой соответствующих столбцов:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \det A_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \det A_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

После этого мы сможем найти неизвестные по *формулам Крамера*:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}; \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}; \quad z = \frac{\det A_z}{\det A}$$

Теперь, обладая необходимыми теоретическими знаниями, перейдем непосредственно к решению нашей задачи (в нашем случае нужно найти только переменную x):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - 5 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4 = 41$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 82; \quad x = \frac{82}{41} = 2$$

Ответ: 2.

Следующие задачи относятся к *векторной алгебре*.

Задача 4. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, заданных точками $A(-8; -6; -1)$, $B(-7; 4; -2)$, $C(0; -1; 1)$.

Решение данной задачи не требует знания большого объема теории. Достаточно знать схему нахождения координат вектора, заданного двумя точками, и нахождение скалярного произведения векторов, заданных своими координатами.

Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ можно найти, если из координат конца вектора (точка B) вычесть соответствующие координаты начала (точка A), аналогичным образом можно найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-7 - (-8); 4 - (-6); -2 - (-1)) = (1; 10; -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - (-8); -1 - (-6); 1 - (-1)) = (8; 5; 2)$$

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат (скалярное произведение является числом):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 56$$

Ответ: 56.

Задача 5. Найти квадрат площади треугольника с вершинами в точках $A(-8;-6;-1)$, $B(-7;4;-2)$, $C(0;-1;1)$.

В данной задаче необходимо обратиться к понятию векторного произведения. Напомним, что *результатом векторного произведения двух векторов также является вектор. Для векторов $\overrightarrow{AB} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\overrightarrow{AC} = (b_x; b_y; b_z)$, заданных своими координатами, результат их векторного произведения $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$ выражается формулой:*

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы, направленные соответственно по осям X, Y, Z .

Площадь треугольника построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (вершинами которого являются точки A, B, C) может быть выражена через их векторное произведение:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Модуль векторного произведения (длина результирующего вектора), с помощью теоремы Пифагора, может быть найден следующим образом:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$

Подставляя это выражение в формулу площади и учитывая то, что, согласно заданию, мы должны найти квадрат площади треугольника, получим:

$$S_{\Delta}^2 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} \right)^2 = \frac{1}{4} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)$$

Теперь, обладая необходимыми теоретическими знаниями, перейдем непосредственно к решению нашей задачи.

Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, были получены в предыдущей задаче. Согласно рассмотренной ранее методике расчета определителя 3-го порядка, найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 10 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 25\vec{i} - 10\vec{j} - 75\vec{k}$$

Исходя из этого, квадрат площади треугольника будет равен:

$$S_{\Delta}^2 = \frac{1}{4} \left(25^2 + (-10)^2 + (-75)^2 \right) = 1587,5$$

Ответ: 1587,5.

Задача 6. Вычислить увеличенный в 6 раз объём пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(2;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(4;3;3)$.

В данной задаче необходимо обратиться к понятию смешанного (векторно-скалярного) произведения, одним из приложений которого является определение объемов треугольных пирамид. Напомним, что *результатом смешанного произведения трех векторов является число.*

Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, выражается формулой:

$$V = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

где $|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ – модуль (поскольку объем не может быть отрицательным) смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

В нашей задаче необходимо найти увеличенный в 6 раз объем пирамиды, поэтому:

$$6V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

Смешанное произведение векторов $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ и $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$, заданных своими координатами, находится по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Теперь, обладая необходимыми теоретическими знаниями, перейдем непосредственно к решению нашей задачи.

Вначале найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0); \quad \overrightarrow{AC} = (0; 1; -2); \quad \overrightarrow{AD} = (2; 3; 2)$$

Исходя из этого, согласно рассмотренной ранее методике расчета определителя 3-го порядка, найдем смешанное произведение векторов:

$$\overrightarrow{ABACAD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12$$

Найдем модуль получившегося результата и получим ответ.

Ответ: 12.

Следующие задачи относятся к *аналитической геометрии на плоскости*.

Задача 7. Найти точку пересечения с осью X прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$, $B(5; 4)$.

Данная задача относится к коротким и не требующим больших вычислений (как и задача 4), поэтому может быть решена в первую очередь.

Вначале необходимо получить уравнение прямой, и затем найти точку пересечения получившейся прямой с осью X .

Напомним *уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$* :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Подставим в уравнение наши данные:

$$\frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{x - 1}{5 - 1} \quad \frac{y - 2}{2} = \frac{x - 1}{4}$$

По условию задачи, мы должны найти точку пересечения прямой с осью X , следовательно, координата этой точки по оси Y будет равна нулю. Нам остается найти только координату по оси X :

$$\frac{0 - 2}{2} = \frac{x - 1}{4} \quad -1 = \frac{x - 1}{4} \quad -4 = x - 1 \quad x = -3$$

Ответ: $(-3; 0)$.

Задача 8. Найти сумму координат проекции точки $A(5; 6)$ на прямую, проходящую через точки $B(1; 3)$, $C(5; 11)$.

В данной задаче фактически мы должны найти точку пересечения прямой, проходящей через точки B и C , и перпендикулярной ей прямой, проходящей через точку A .

Уравнение прямой, проходящей через две точки, как мы знаем из предыдущей задачи, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Из него можно получить координаты *направляющего вектора* (направленного параллельно прямой) $\vec{n} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Далее необходимо найти уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно данному вектору.

Напомним уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (a; b)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Далее нам останется только найти их точку пересечения, например, выразив из обоих уравнений y и приравняв их.

Теперь, обладая необходимыми теоретическими знаниями, перейдем непосредственно к решению нашей задачи.

Уравнение прямой, проходящей через точки B и C имеет вид:

$$\frac{y - 3}{11 - 3} = \frac{x - 1}{5 - 1} \quad \frac{y - 3}{8} = \frac{x - 1}{4} \quad \frac{y - 3}{2} = \frac{x - 1}{1} \quad y - 3 = 2x - 2 \quad y = 2x + 1$$

Найдя координаты направляющего вектора $\vec{n} = (1; 2)$, получим уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно данному вектору:

$$1 \cdot (x - 5) + 2 \cdot (y - 6) = 0 \quad x + 2y - 17 = 0 \quad y = \frac{17 - x}{2}$$

Приравняем правые части обоих уравнений для нахождения x :

$$2x + 1 = \frac{17 - x}{2} \quad 4x + 2 = 17 - x \quad 5x = 15 \quad x = 3$$

Теперь, подставив значение x в любое из полученных уравнений прямых, найдем y и сложим с найденным x для получения ответа:

$$y = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \quad 3 + 7 = 10$$

Ответ: 10.

Следующие задачи относятся к *аналитической геометрии в пространстве*.

Задача 9. Найти сумму координат точки пересечения XOY с прямой, проходящей через точки $A(1;2;3)$, $B(2;1;1)$.

Данная задача также относится к коротким, поэтому может быть решена в первую очередь.

Вначале необходимо получить уравнение прямой, и затем найти точку пересечения получившейся прямой с плоскостью XOY .

Напомним *уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$* :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Подставим в уравнение наши данные:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-3}{1-3} \quad x-1 = 2-y = \frac{z-3}{-2}$$

По условию задачи, мы должны найти точку пересечения прямой с плоскостью XOY , следовательно, координата этой точки по оси Z будет равна нулю. Нам остается найти только координаты по осям X и Y :

$$x-1 = 2-y = \frac{0-3}{-2} \quad x-1 = 2-y = 1,5 \quad x = 2,5 \quad y = 0,5$$

Теперь сложим найденные значения x , y и z для получения ответа.

Ответ: 3.

Задача 10. Найти сумму координат точки пересечения с осью X плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(-1;-2;0)$.

Для решения этой задачи вначале необходимо получить уравнение плоскости, и затем найти точку пересечения получившейся плоскости с осью X .

Напомним *уравнение плоскости, проходящей через точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ и $C(x_3; y_3; z_3)$* :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставим в уравнение наши данные и преобразуем как определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & -1-2 & 1-3 \\ -1-1 & -2-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad x+7y-10z+15=0$$

По условию задачи, мы должны найти точку пересечения плоскости с осью X , следовательно, координаты этой точки по осям Y и Z будут равны нулю. Нам остается найти только координату по оси X :

$$x + 7 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 15 = 0 \quad x = -15$$

Теперь сложим найденные значения x , y и z для получения ответа.

Ответ: -15.

Задача 11. Найти сумму координат проекции точки $D(3;2;7)$ на плоскость, проходящую через точки $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(1;0;3)$.

В данной задаче фактически мы должны найти точку пересечения плоскости, проходящей через точки A , B и C , и перпендикулярной ей прямой, проходящей через точку D .

Методику получения уравнения плоскости проходящей через три точки мы знаем из предыдущей задачи. В конечном счете, у нас получится уравнение вида:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Из него можно получить координаты *нормального вектора* (направленного перпендикулярно плоскости) $\vec{n} = (a; b; c)$. Далее необходимо найти уравнение прямой, проходящей через точку D параллельно данному вектору.

Напомним уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\vec{n} = (a; b; c)$ (каноническое уравнение прямой):

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Но использовать его в таком виде будет не совсем удобно. Запишем его в *параметрическом виде*:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Далее подставим его в уравнение плоскости и будем искать значение параметра t :

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0 \quad t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Получив значение параметра t , нам останется подставить его в параметрическое уравнение прямой и найти значения x , y и z .

Теперь, обладая необходимыми теоретическими знаниями, перейдем непосредственно к решению нашей задачи.

Уравнение плоскости, проходящей через точки A , B и C , имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & 3-0 & 0-0 \\ 1-2 & 0-0 & 3-0 \end{vmatrix} = 0 \quad 9x + 6y + 3z - 18 = 0 \quad 3x + 2y + z - 6 = 0$$

Получив координаты нормального вектора $\vec{n} = (3; 2; 1)$, запишем параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку D :

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 7 + t \end{cases}$$

Подставив его в уравнение плоскости, найдем значение параметра t :

$$3 \cdot (3 + 3t) + 2 \cdot (2 + 2t) + 1 \cdot (7 + t) - 6 = 0 \quad t = -\frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 - 6}{3^2 + 2^2 + 1^2} = -1$$

Теперь мы можем подставить значение параметра t в параметрическое уравнение прямой и найти значения x , y и z :

$$\begin{cases} x = 3 + 3 \cdot (-1) \\ y = 2 + 2 \cdot (-1) \\ z = 7 + (-1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}$$

Осталось сложить найденные значения x , y и z для получения ответа.

Ответ: 6.

Последняя задача относится к теме *комплексные числа*.

Задача 12. Найти действительную часть комплексного числа z , если $z = \frac{2-i}{3+i}$.

Для начала напомним, что *комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x (действительная часть) и y (мнимая часть) – действительные числа, а i – мнимая единица ($i^2 = -1$)*. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Для решения задачи необходимо умножить числитель и знаменатель данного нам выражения на сопряженное к знаменателю комплексное число, и преобразовать получившееся выражение:

$$z = \frac{2-i}{3+i} = \frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-5i+i^2}{9-i^2} = \frac{6-5i-1}{9+1} = \frac{5-5i}{10} = 0,5 - 0,5i$$

В данном случае действительная часть $x = 0,5$ и мнимая часть $y = -0,5$.

Ответ: 0,5.

II. Математический анализ

Зачет или экзамен по курсу «Математический анализ» включает в себя задачи по пределам, производным и исследованию функций. Задачи будут рассмотрены не в порядке следования в билете (который может меняться), а по тематике.

Вначале рассмотрим задачи, относящиеся к теме *пределы*.

Задача 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2(x+1)}{x^3+2x+1}$.

Решение данной задачи не требует значительных теоретических знаний, поэтому сразу перейдем к вычислениям.

Раскроем скобки в числителе:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x+1)^2(x+1)}{x^3+2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(9x^2+6x+1)(x+1)}{x^3+2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3+15x^2+7x+1}{x^3+2x+1}$$

Поделим числитель и знаменатель получившегося выражения на x в максимальной степени, т.е. на x^3 . В результате этого появятся слагаемые, у которых в числителе будет константа, а в знаменателе x в некоторой степени – они стремятся

к нулю при x стремящемся к бесконечности. Предел от оставшейся константы будет равен самой константе.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 + 15x^2 + 7x + 1}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 + \frac{15}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 + 0 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \lim_{x \rightarrow \infty} 9 = 9$$

Ответ: 9.

Задача 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$.

Попробуем подставить указанное в задаче значение x в данное нам выражение:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 - 4}{2^2 - 3 \cdot 2 + 2} = \frac{0}{0}$$

Мы получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$, от которой необходимо избавиться.

Поскольку значение $x = 2$ обнулило числитель и знаменатель, оно является их корнем. Найдем остальные корни, представим числитель и знаменатель в виде сомножителей, сократим на $(x - 2)$ и опять подставим значение x :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 1} = 4$$

Ответ: 4.

Следующие задачи относятся к теме *производные*.

Вначале полезно будет напомнить некоторые *табличные производные* (в таблице u принимается за переменную или некоторую функцию от переменной):

1. $(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$	2. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	11. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	12. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	13. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	14. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
9. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	10. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	

Формулы 2, 4, 6 являются соответственно частными случаями формул 1, 3, 5.

Основные методы вычисления производных (u и v – функции, c – константа):

$$c' = 0; \quad (c \cdot u)' = c \cdot u'; \quad (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}; \quad (u^v)' = u^v \left(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} \cdot u' \right)$$

Производная сложной функции $f = v(u)$ вычисляется: $f' = v'(u) \cdot u'$.

Задача 3. Вычислить производную функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Здесь дана сложная функция. Воспользуемся формулой 6 и затем формулой 1:

$$y' = (\ln(1 + x^2))' = \frac{1}{1 + x^2} \cdot (1 + x^2)' = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Ответ: $\frac{2x}{1 + x^2}$.

Задача 4. Вычислить производную функции $y = \sqrt{3x + 1} \cdot \sin 2x$.

В этой задаче дано произведение двух сложных функций. Воспользуемся формулами 2 и 7:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{3x + 1} \cdot \sin 2x)' = (\sqrt{3x + 1})' \cdot \sin 2x + \sqrt{3x + 1} \cdot (\sin 2x)' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot (3x + 1)' \cdot \sin 2x + \sqrt{3x + 1} \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = \frac{3 \sin 2x}{2\sqrt{3x + 1}} + 2\sqrt{3x + 1} \cdot \cos 2x \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3 \sin 2x}{2\sqrt{3x + 1}} + 2\sqrt{3x + 1} \cdot \cos 2x$.

Задача 5. Вычислить производную функции $y = \frac{\arctg 4x}{x^3}$.

В этой задаче дано частное сложной функции и табличной функции. Воспользуемся формулами 13 и 1:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\arctg 4x}{x^3} \right)' = \frac{(\arctg 4x)' \cdot x^3 - \arctg 4x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \\ &= \frac{1}{1 + (4x)^2} \cdot (4x)' \cdot \frac{1}{x^3} - \frac{\arctg 4x}{x^6} \cdot 3x^2 = \frac{4}{x^3 + 16x^5} - \frac{3 \arctg 4x}{x^4} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{x^3 + 16x^5} - \frac{3 \arctg 4x}{x^4}$.

Задача 6. Вычислить вторую производную функции $y = e^{2x} \cos 4x$.

Вторая производная – это производная от производной. Вначале найдем первую производную, для этого воспользуемся формулами 4 и 8:

$$\begin{aligned} y' &= (e^{2x} \cos 4x)' = (e^{2x})' \cdot \cos 4x + e^{2x} \cdot (\cos 4x)' = \\ &= e^{2x} \cdot (2x)' \cdot \cos 4x + e^{2x} \cdot (-\sin 4x) \cdot (4x)' = 2e^{2x} \cos 4x - 4e^{2x} \sin 4x \end{aligned}$$

Теперь найдем вторую производную, воспользовавшись теми же формулами:

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = (2e^{2x} \cos 4x - 4e^{2x} \sin 4x)' = 2(e^{2x} \cos 4x)' - 4(e^{2x} \sin 4x)' = \\ &= 2(e^{2x})' \cdot \cos 4x + 2e^{2x} \cdot (\cos 4x)' - 4(e^{2x})' \cdot \sin 4x - 4e^{2x} \cdot (\sin 4x)' = \\ &= 4e^{2x} \cos 4x - 8e^{2x} \sin 4x - 8e^{2x} \sin 4x - 16e^{2x} \cos 4x = -4e^{2x} (3\cos 4x + 4\sin 4x) \end{aligned}$$

Ответ: $-4e^{2x} (3\cos 4x + 4\sin 4x)$.

Задача 7. Найти точку пересечения касательной к графику функции $y = x^4 + 2x + 1$ в точке $M(1; 4)$ с осью X .

В этой задаче необходимо получить уравнение касательной к графику функции в данной точке, а затем найти точку пересечения этой касательной с указанной осью координат.

Напомним, что уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

По условию задачи, мы должны найти точку пересечения касательной с осью X , следовательно, координата этой точки по оси Y будет равна нулю.

Перейдем непосредственно к решению нашей задачи:

$$y' = (x^4 + 2x + 1)' = 4x^3 + 2 \quad y'(1) = 4 \cdot 1^3 + 2 = 6 \quad 0 - 4 = 6 \cdot (x - 1) \quad x = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

Задача 8. Тело движется по оси X . Координата меняется в зависимости от времени по закону $X(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 3t + 1$. Вычислить скорость при $t = 2$.

Одним из физических приложений производной является нахождение функции скорости по известной функции изменения положения тела в пространстве.

Найдем функцию скорости и подставим в нее указанное в задаче значение времени:

$$V(t) = (X(t))' = \left(\frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 3t + 1 \right)' = 4t^2 - 5t + 3 \quad V(2) = 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 9$$

Ответ: 9.

Следующие задачи относятся к теме *исследование функций*.

Задача 9. Найти точки максимума функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Напомним, что *непрерывная функция $f(x)$ имеет экстремум в критической точке x_0 (в которой производная $f'(x)$ равна нулю или не существует), если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точке, а слева и справа от x_0 производная $f'(x)$ имеет разные знаки, причем, если слева плюс и справа минус – это точка максимума, если слева минус и справа плюс – это точка минимума*. Это обусловлено тем, что положительное значение производной на некотором интервале показывает возрастание функции на этом интервале, а отрицательное – убывание.

В нашей задаче функция определена на всей числовой оси $(-\infty; +\infty)$, следовательно, функция может иметь экстремум лишь в точках, в которых производная равна нулю. Найдем производную функции, приравняем к нулю и вычислим значения x :

$$y' = (2x^3 - 3x^2 + 1)' = 6x^2 - 6x \quad 6x^2 - 6x = 0 \quad x(x-1) = 0 \quad x_1 = 0; x_2 = 1$$

Полученные точки разбивают числовую ось на 3 интервала. Определим знаки производной в каждом из них:

$$x \in (-\infty; 0) \quad - \quad f'(x) > 0$$

$$x \in (0; 1) \quad - \quad f'(x) < 0$$

$$x \in (1; +\infty) \quad - \quad f'(x) > 0$$

Согласно заданию, мы должны найти точки максимума. Таковой является только точка $x = 0$, т.к. слева от нее производная имеет знак плюс, а справа минус.

Ответ: 0.

Задача 10. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 1$ на отрезке $[-1; 2]$.

Напомним, что *функция может принимать наибольшее и наименьшее значения в точках экстремума или на концах отрезка.*

Найдем точки экстремума данной нам функции:

$$y' = (x^3 + 6x^2 + 1)' = 3x^2 + 12x \quad 3x^2 + 12x = 0 \quad x(x + 4) = 0 \quad x_1 = -4; x_2 = 0$$

Значение $x = -4$ не принадлежит данному нам отрезку, поэтому его мы не учитываем. Найдем значения функции в точке $x = 0$ и на концах отрезка:

$$y(-1) = (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 1 = 6$$

$$y(0) = (0)^3 + 6 \cdot (0)^2 + 1 = 1$$

$$y(2) = 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 1 = 33$$

Осталось выбрать наибольшее значение функции.

Ответ: 33.

Задача 11. Найти точки перегиба графика функции $y = x^5 - 5x^4 + \frac{20}{3}x^3 + 3x + 1$.

Напомним, что x_0 является *точкой перегиба графика функции $f(x)$, если вторая производная $f''(x)$ равна нулю в этой точке, а слева и справа от нее имеет разные знаки.*

Вычислим вторую производную данной нам функции и, приравняв к нулю, вычислим значения x :

$$y'' = \left(x^5 - 5x^4 + \frac{20}{3}x^3 + 3x + 1 \right)'' = (5x^4 - 20x^3 + 20x^2 + 3)' = 20x^3 - 60x^2 + 40x$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$$

Все найденные точки удовлетворяют условиям существования точек перегиба (что вы можете проверить самостоятельно).

Ответ: 0; 1; 2.

Задача 12. Найти асимптоту графика функции $y = \frac{2x^2 + 5x + 1}{4x + 3}$ при $x \rightarrow \infty$.

Напомним, что *асимптотой графика функции является прямая, расстояние до которой от графика стремится к нулю, при неограниченном удалении от начала координат*. Асимптоты графика функции бывают вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Уравнение *наклонной* (и *горизонтальной*) *асимптоты* ищется в виде $y = kx + b$, где k и b – неизвестные коэффициенты. Если k равно нулю мы получим горизонтальную асимптоту, иначе – наклонную. Для нахождения коэффициентов k и b используются уравнения (заметим, что в общем случае необходимо искать значения k и b отдельно для $+\infty$ и $-\infty$, так как они могут отличаться):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$$

В нашей задаче необходимо найти наклонную или горизонтальную асимптоту. Вычислим коэффициенты k и b , и подставим их в искомое уравнение асимптоты (методика вычисления таких пределов показана ранее):

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{4x^2 + 3x} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 5x + 1}{4x + 3} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 10x + 2}{2 \cdot (4x + 3)} - \frac{4x^2 + 3x}{2 \cdot (4x + 3)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 2}{8x + 6} \right) = \frac{7}{8}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{7}{8}$$

Ответ: $y = \frac{x}{2} + \frac{7}{8}$.

Литература

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
2. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика, том 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд. 5 стереотип. «Дрофа» М., 2003 г.
3. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика том 2. Дифференциальное и интегральное исчисление. Изд. 5 стереотип. «Дрофа» М., 2003 г.
4. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: Учеб. Для вузов. — 7-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
5. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. — 6-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, тт. 1-2, М., Наука, 2000 г.
7. Катасонов А.М. Введение в математический анализ. Программированное учебное пособие. МГАПИ, 1999 г.
8. Катасонов А.М. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Программированное учебное пособие. МГАПИ, 1996 г.
9. Катасонов А.М. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков. Программированное учебное пособие. МГАПИ, 1997 г.
10. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. / 5-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2005.