ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**Московский государственный университет
приборостроения и информатики**

кафедра высшей математики

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Методические указания для студентов дневной формы обучения

Москва 2007

Составители: д.т.н. Головешкин В.А., к.т.н. Егиазаров Ю.И., к.т.н. Зюзько Т.Н.
УДК 517.
Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания для студентов дневной формы обучения./МГУПИ. Сост. д.т.н. Головешкин В.А., к.т.н. Егиазаров Ю.И., к.т.н. Зюзько Т.Н.
М. 2007.

Излагаются основные методы решения задач по следующим разделам курса высшей математики: вычисление пределов; производная функции одной переменной; исследование функций и построение их графиков. Приведены примеры решения задач контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дневной форме обучения. Библиогр: 8 .

Рецензент: доц. Якобовская И.М.

Введение.

Цель данного пособия помочь студенту самостоятельно овладеть навыками решения задач, подготовиться к выполнению контрольных работ, к зачету и экзамену. При написании пособия авторы не ставили своей целью дать систематическое изложение теоретического материала. Перед каждой рассматриваемой задачей дается тот теоретический материал, который необходим для ее решения. Если студент ранее овладел необходимым теоретическим материалом, то вводную часть каждой задачи он может опустить и перейти непосредственно к решению задачи. Необходимо отметить, что приведенный теоретический материал достаточно полно охватывает курс указанного предмета. Авторы надеются, что пособие будет полезно студентам в овладении методами решения основных задач курса дифференциального исчисления функций одной переменной.

Вычисление пределов.

Прежде чем перейти к рассмотрению задач напомним некоторые основные моменты теории. Мы предполагаем, что студентам уже знакомо определение предела функции и поэтому перейдем непосредственно к свойствам пределов.

Сформулируем основные свойства пределов:

1. Предел постоянной равен самой постоянной.

$\lim\limits_{x\to a} c = c$

2. Предел суммы конечного числа слагаемых равен сумме их пределов:

$\lim\limits_{x\to a}(u+v) = \lim\limits_{x\to a} u + \lim\limits_{x\to a} v.$

3. Предел произведения конечного числа множителей равен произведению их пределов:

$\lim\limits_{x\to a}(uv) = \lim\limits_{x\to a} u \cdot \lim\limits_{x\to a} v$

В частности полезно запомнить, что $\lim\limits_{x\to a}(cv) = c\cdot\lim\limits_{x\to a} v$, то есть постоянный множитель можно выносить за знак предела.

4. Предел частного равен частному пределов числителя и знаменателя, если предел знаменателя отличен от нуля:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} u}{\lim\limits_{x\to a} v}, \quad \lim\limits_{x\to a} v \neq o.$

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в точке $x=a,$ то предел функции в точке равен значению функции в этой точке, например

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x}{x+2} = \dfrac{1+5}{1+3} = \dfrac{3}{2}..$

Отметим, что все элементарные функции непрерывны в тех точках, где они определены. Поэтому для всех элементарных функций $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, если f(x) определена в точке x=a.

Отметим два важных факта, которые мы будем использовать при вычислении пределов.

Если $g(x)$ ограниченная в окрестности точки x=a функция, а $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция , то есть $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x)\alpha(x) = 0$.

Если $g(x)$ ограниченная в окрестности точки x=a функция, а $f(x)$ - бесконечно большая функция, то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Наибольшие трудности интерес вызывает вычисление пределов функций в точках разрыва или на концах области определения. Если число $x=a$ не принадлежит области определения или $a=\infty$, то для нахождения предела необходимо специальное исследование. В этих случаях возможны следующие неопределенные ситуации, которые будем называть неопределенностями: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ (в случае вычисления предела частного), $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}.

Приведем ряд формул, которые используются для раскрытия неопределенностей.

1. Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Здесь имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Заметим, что на месте переменной x под знаком предела может стоять любая функция при условии, что она является бесконечно малой при $x\to 0$. То есть, верна более общая формула:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1,\ \lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

2. Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \text{или}\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

аналогично верны обобщенные формулы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e,\ \text{если}\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty;$$

$$\lim_{x\to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=e,\ \text{если}\ \lim_{x\to a} f(x)=0,$$

Существенно упрощает вычисление пределов использование эквивалентных бесконечно малых функций.

Напомним, что бесконечно малые функции $\alpha(x)$ ($\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$) и $\beta(x)$ ($\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$) называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Эквивалентность бесконечно малых обозначается символом $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Приведем некоторые часто используемые, эквивалентные в окрестности точки x=0 ,бесконечно малые функции.

Поскольку:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1 \Rightarrow \text{tg(x)} \sim \text{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \Rightarrow \text{arcsin(x)} \sim \text{x};$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1 \;\Rightarrow \text{arctg(x)} \sim \text{x};$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \;\Rightarrow \ln(1+x) \sim \text{x};$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \;\Rightarrow e^x-1 \sim \text{x}.$

Для эквивалентных бесконечно малых функций верна следующая теорема о замене бесконечно малых функций эквивалентными бесконечно малыми функциями:
предел отношения бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций.
Например,
$\lim\limits_{x\to 0}=\frac{tgx\cdot\left(e^x-1\right)}{x\cdot\ln\left(x+1\right)}=\frac{x\cdot x}{x\cdot x}=1.$

Фактически эта теорема означает, что если при вычислении предела бесконечно малая входит в виде множителя или знаменателя дроби, то она может быть заменена на эквивалентную.

Далее перейдем к разбору задач.

Первая задача представляет предел вида $\frac{\infty}{\infty}$, где числитель и знаменатель являются произведением многочленов или многочленов, стоящих под знаком радикала. Основной прием решения таких задач состоит в вынесении независимой переменной x в старшей степени за скобки в каждом из многочленов. Рассмотрим примеры.

Задача 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)(2x+1)^3}{(3x+7)^2(x^3+4x^2+2)}$.

Преобразуем это выражение. В каждом из многочленов вынесем множитель x в старшей степени за скобки. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)(2x+1)^3}{(3x+7)^2(x^3+4x^2+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right]\left[x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right]^3}{\left[x\left(3+\frac{7}{x}\right)\right]^2x^3\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)^3}{x^5\left(3+\frac{7}{x}\right)^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)^3}{\left(3+\frac{7}{x}\right)^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{(1+0+0)(2+0)^3}{(3+0)^2(1+0+0)}$$

$$=\frac{8}{9}.$$

Ответ: $\dfrac{8}{9}$.

В процессе вычисления предела мы воспользовались теоремами о пределе суммы, произведения, частного, а так же теоремой о делении ограниченной величины на бесконечно большую.

К примеру $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}=0$.

<u>Задача 2.</u> Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^{10}+3x^6+5}}{\sqrt[4]{x^8+x+1}\cdot(2x+1)^2(3x-1)}.$$

<u>Решение.</u>

Данный предел есть неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для нахождения этого предела вынесем из-под знаков радикалов и скобок наивысшие степени x, в результате получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^{10}+3x^6+5}}{\sqrt[4]{x^8+x+1}\cdot(2x+1)^2(3x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^{10}}}}{x^2\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^8}}\cdot x^2\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)^2\cdot x\cdot\left(3-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^{10}}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^8}}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{1\cdot4\cdot3}=\frac{1}{12}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{12}$.

Задача 3.

Вторая задача контрольной работы представляет пределы вида $\infty-\infty$, где каждое слагаемое является либо просто многочленом, либо многочленом, стоящим под знаком радикала. Для решения такого типа задач применятся прием, который называется умножением на сопряженное. Суть этого приема заключена следующих формулах:

$$\sqrt{b}-\sqrt{a}=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}};$$

$$\sqrt{b}-a=\frac{\left(\sqrt{b}-a\right)\left(\sqrt{b}+a\right)}{\left(\sqrt{b}+a\right)}=\frac{b-a^2}{\sqrt{b}+a}.$$

Рассмотрим примеры.

<u>Задача. 4</u> Найти предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+5}+2x\right)$.

Данный предел является пределом вида ∞–∞. Умножим и разделим выражение под знаком предела на выражение сопряженное этой сумме $\left(\sqrt{4x^2+8x+5}-2x\right)$. Получим

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+5}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+8x+5}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+8x+5}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+8x+5}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(4x^2+8x+5-4x^2\right)}{\left(\sqrt{4x^2+8x+5}-2x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(8x+5)}{\left(\sqrt{4x^2+8x+5}-2x\right)}=$$ (далее ход решения аналогичен тому, который был использован в предыдущей задаче)=

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(8+\frac{5}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-2x\right)}=$$ (заметим, что при x<0 имеем $\sqrt{x^2}=-x$)=

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(8+\frac{5}{x}\right)}{(-x)\left(\sqrt{\left(4+\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+2\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(8+\frac{5}{x}\right)}{\left(\sqrt{\left(4+\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+2\right)}=-\frac{8}{2+2}=-2\,.$$

Ответ:-2.

<u>Задача 5.</u> Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-\sqrt{x^2-4x+3}\right)$$

<u>Решение</u>.

Данный предел есть неопределенность вида $\infty-\infty$. Под знаком предела стоит разность корней второй степени. Для нахождения этого предела умножим и разделим эту разность на выражение, сопряженное этой разности. В результате

получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-\sqrt{x^2-4x+3}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x+5}-\sqrt{x^2-4x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+6x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}\right)}{\sqrt{x^2+6x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x+5-x^2+4x-3}{\sqrt{x^2+6x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{10x+2}{\sqrt{x^2+6x+5}+\sqrt{x^2-4x+3}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{10+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(10+\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = \frac{10}{2} = 5.$$

Ответ: 5.

Следующая задача представляет предел вида $\frac{0}{0}$. Числитель и знаменатель выражения являются многочленами, которые в точке $x=a$ равны нулю. Основной прием решения таких задач состоит в следующем. Известно, что если многочлен степени n $P_n(x)$ равен нулю при $x=a$, то его можно представить в виде $P_n(x)=(x-a)P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ является многочленом степени n-1.

<u>Задача 6</u> Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x-12}{x^4-x^2-12}.$$

<u>Решение.</u>

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Под знаком предела стоит отношение многочленов. Для нахождения этого предела разложим числитель и знаменатель дроби на множители, выделив множители вида $(x-2)^{\alpha}$ с максимально возможным показателем степени. Для этого поделим числитель и знаменатель на двучлен $(x-2)$ "столбиком".

$$\begin{array}{l|l}
x^4-2x-12 & \underline{x-2} \\
\underline{x^4-2x^3} & x^3+2x^2+4x+6 \\
2x^3-2x-12 & \\
\underline{2x^3-4x^2} & \\
4x^2-2x-12 & \\
\underline{4x^2-8x} & \\
6x-12 & \\
\underline{6x-12} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^4-x^2-12 & \underline{x-2} \\
\underline{x^4-2x^3} & x^3+2x^2+3x+6 \\
2x^3-x^2 & \\
\underline{2x^3-4x^2} & \\
3x^2 & \\
\underline{3x^2-6x} & \\
6x-12 & \\
\underline{6x-12} & \\
0 &
\end{array}$$

Подставляя найденные разложения многочленов под знак предела, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x-12}{x^4-x^2-12}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+6)}{(x-2)(x^3+2x^2+3x+6)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+4x+6}{x^3+2x^2+3x+6}=$$

$$=\frac{8+2\cdot 4+4\cdot 2+6}{8+2\cdot 4+3\cdot 2+6}=\frac{30}{28}=\frac{15}{14}.$$

Ответ: $\frac{15}{14}$.

Задача 7 Найти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{x^2+3x+2}$.

Значение x=–1 является корнем каждого из многочленов, стоящего в числителе и знаменателе дроби. Аналогичным образом разложив на множители, получаем:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+4)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-x+4)}{(x+2)}=6.$$

Ответ: 6.

Следующая задача представляет предел вида $\frac{0}{0}$. Числитель и знаменатель выражения содержат радикалы. Основной прием решения таких задач состоит в умножении на сопряженное. Этот прием использован ранее при решении задачи 2.

Задача 8. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{11-x}}{x^2-3x+2}$.

Данный предел есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для нахождения предела преобразуем выражение под знаком предела к виду, в котором и в числителе и в знаменателе дроби будут множители вида $(x-2)^{\alpha}$, α>0.

Для этого числитель и знаменатель выражения умножим на сопряженное к разности в числителе, то есть на множитель ($\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$). Знаменатель разложим на множители. Получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-\sqrt{11-x}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{11-x}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+7)-(11-x)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x-1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\right)}=\frac{2}{1(3+3)}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Задача 9. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}-1}.$$

Решение.

Данный предел есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для нахождения предела преобразуем выражение под знаком предела к виду, в котором и в числителе и в знаменателе дроби будут множители вида $(x-1)^{\alpha}, \alpha \geq 0$. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряженные числителю и знаменателю соответственно. В результате получим:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{8+x}-\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(8+x-10+x)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(2\left(\sqrt{x}+1\right)\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{8+x}+\sqrt{10-x}\right)}=\frac{2\cdot 2}{3+3}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Решение следующей задачи связано с использованием первого замечательного предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. При решении подобных задач полезно использовать два соотношения.

Первое. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k$. Для его вывода сделаем замену переменных $t=kx$. Тогда $x=\frac{t}{k}$, $\lim\limits_{x\to 0} t=0$.Тогда получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\left(\frac{t}{k}\right)}=k\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=k.$$

Второе. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$.

Это соотношение получается следующим

путем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{\left(\frac{\sin bx}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin bx}{x}\right)}=\frac{a}{b}$.

<u>Задача 10.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$.

Преобразуем данное выражение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\frac{1-\cos x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=$$

(воспользуемся теоремой о пределе произведения, а так же формулой $1-\cos x=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$)

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}\right)=$$

$$\frac{1}{1}\cdot 1\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

<u>Задача 11</u>. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tg3x}{\cos\dfrac{3x}{2}}$.

<u>Решение</u>.

Данный предел есть неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Поскольку в числителе дроби, стоящей под знаком предела, имеем $tg3x=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}$, то, сведем этот предел к первому замечательному пределу. Для этого сделаем замену переменной $y=x-\pi$, тогда $x=y+\pi$, и $y\to 0$ при $x\to\pi$. В результате получим:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{tg3x}{\cos\frac{3x}{2}}=\lim_{y\to 0}\frac{tg3(y+\pi)}{\cos\frac{3}{2}(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{tg3y}{\sin\frac{3}{2}y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{\cos 3y\cdot\sin\frac{3}{2}y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos 3y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3y}{3y}\cdot 3y}{\dfrac{\sin\frac{3}{2}y}{\frac{3}{2}y}\cdot\dfrac{3}{2}y}=1\cdot\frac{3}{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin 3y}{3y}}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin\frac{3}{2}y}{\frac{3}{2}y}}=2.$$

Заметим, что мы воспользовались тем, что функция $y=tgx$ имеет период π, поэтому $tg3(y+\pi)=tg3y$. Кроме того, из свойств тригонометрических функций известно, что $\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin x$. Поэтому $\cos\frac{3}{2}(y+\pi)=\sin\frac{3}{2}y$.

Ответ: 2.

Задача 12. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

Сделаем замену переменной t=x–π. Тогда t→0 при x→0. Следовательно: x=t+π, sin5x=sin(5t+5π)=-sin5t, in6x=sin(6t+6π)=sin6t. Получаем $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 6x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\sin 5t}{\sin 6t}=-\frac{5}{6}$.

Ответ: $-\frac{5}{6}$.

Решение следующей задачи требует знания второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Укажем еще на один факт, который следует из второго замечательного предела и бывает полезен при решении подобных задач: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$.

Чтобы получить такой вывод, сделаем замену переменных x=kt. Тогда t→∞ при t→∞. Получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{k}{kt}\right)^{kt}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^k=e^k.$$

Например $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{x}\right)^x=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Задача 13. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{5x+4}.$$

Решение.

Данный предел есть неопределенность вида 1^∞. Сведем этот предел ко второму замечательному пределу. В основании степени, стоящей под знаком предела, выделим единицу (разделив числитель на знаменатель):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{5x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3-3-1}{2x+3}\right)^{5x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{5x+4}.$$

Далее преобразуем выражение под знаком предела, выделив второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{5x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{5x+4}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{4}{2x+3}\right)^{-\left(\frac{2x+3}{4}\right)}\right]^{-\frac{4}{2x+3}(5x+4)}=$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{4}{2x+3}(5x+4)} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(5x+4)}{2x+3}} = e^{-10}.$$

В конце решения примера сделан переход к пределу под знаком показательной функции.

<u>Ответ</u>: e^{-10}.

Рассмотрим другой возможный способ решения таких задач.

<u>Задача 14</u>. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-2}\right)^{2x-3}$.

Преобразуем это выражение следующим образом

$$\left(\frac{5x+1}{5x-2}\right)^{2x-3} = \left[\frac{1+\frac{1}{5x}}{1-\frac{2}{5x}}\right]^{2x-3} = \left[\left(\frac{1+\frac{1}{5x}}{1-\frac{2}{5x}}\right)^{x}\right]^{\frac{2x-3}{x}}.$$

Тогда $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-2}\right)^{2x-3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1+\frac{1}{5x}}{1-\frac{2}{5x}}\right)^{x}\right]^{\frac{2x-3}{x}} = \left[\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{-2}{5}\right)}{x}\right)^{x}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x}} =$$

$$\left[\frac{e^{\frac{1}{5}}}{e^{\frac{-2}{5}}}\right]^{2} = e^{\frac{6}{5}}.$$

Ответ: $e^{\frac{6}{5}}$.

При решении следующей задачи существенное упрощение в ход решения вносит использование эквивалентных бесконечно малых. Рассмотрим примеры.

<u>Задача 15.</u>

Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{tg^3 2x\sin 5x}$.

Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми при $x\to 0$.

Так как : $1-\cos x^2 = 2\sin^2\frac{x^2}{2}$, а sinx~x, то $1-\cos x^2 \sim 2\frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2}\sim\frac{x^4}{2}$.

Аналогично $tg^3 2x\sim 8x^3$, sin5x~5x. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{tg^3 2x\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2}}{8x^3 5x}=\frac{1}{80}.$$

Ответ: $\frac{1}{80}$.

Задача 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+tg^2 5x^3\right)}{\left(e^{x^3}-1\right)\sin^3 4x}$.

Решение.

Данный предел есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для нахождения этого предела воспользуемся теоремой о замене бесконечно малых функций эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как

$\ln\left(1+tg^2 5x^3\right)\sim tg^2 5x^3\sim\left(5x^3\right)^2=25x^6$ при $x\to 0$;

$\left(e^{x^3}-1\right)\sim x^3$ при $x\to 0$;

$\sin^3 4x=(\sin 4x)^3\sim(4x)^3=64x^3$ при $x\to 0$,

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+tg^2 5x^3\right)}{\left(e^{x^3}-1\right)\sin^3 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^6}{x^3\cdot 64x^3}=\frac{25}{64}.$$

Ответ: $\frac{25}{64}$.

Рассмотрим пределы вида 1^∞. Остановимся на возможных способах решения таких задач.

Задача 17. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos 3x)^{ctg^2 5x}$

Данный предел есть неопределенность вида 1^∞. Для его нахождения выделим в основании степени, стоящей под знаком предела, единицу. Для этого используем тригонометрическую формулу: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}(\cos 3x)^{ctg^2 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{3}{2}x\right)^{ctg^2 5x}.$$

Далее сведем предел ко второму замечательному пределу методом, использованным в задаче 6:

$$\lim_{x\to\infty}(\cos 3x)^{ctg^2 5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-2\sin^2\frac{3}{2}x\right)^{ctg^2 5x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-2\sin^2\frac{3}{2}x\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{3}{2}x}}\right]^{\left(-2\sin^2\frac{3}{2}x\right)\cdot\frac{\cos^2 5x}{\sin^2 5x}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x\cdot\cos^2 5x}{\sin^2 5x}}.$$

Далее используем тот факт, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 5x = 0$ и применим теорему о замене бесконечно малых функций эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как

$$\sin^2\frac{3}{2}x \sim \left(\frac{3}{2}x\right)^2, \sin^2 5x \sim (5x)^2,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}(\cos 3x)^{ctg^2 5x} = e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x\cdot\cos^2 5x}{\sin^2 5x}} = e^{-\frac{2\cdot\frac{9}{4}x^2\cdot 1}{25x^2}} = e^{-\frac{9}{50}}.$$

<u>Ответ</u>: $e^{-\frac{9}{50}}$.

Второй способ решения таких задач использует равенство $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\ln(f(x))\right]}$, если конечно указанный предел существует.

<u>Задача 18</u>. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg2x)^{ctg3x}$.

Имеем $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg2x)^{ctg3x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[ctg3x\ln(1+tg2x)\right]}$.

Для вычисления предела, стоящего в степени воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми. При $x\to 0$ имеем

ln(1+tg2x) ~tg2x~2x; ctg3x=$\frac{1}{tg3x}$; tg3x~3x. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\left[ctg3x\ln(1+tg2x)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{tg3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $e^{\frac{2}{3}}$.

<u>Задача 19.</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-1}$.

<u>Решение</u>.

Данный предел есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для нахождения предела сделаем замену $x = t^6$, где показатель степени переменной t будем определять как наименьшее общее кратное порядков корней, входящих в выражение под знаком предела.

Тогда при $x\to 1$ имеем $t\to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\frac{t^3+3t^2-4}{t^3-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(t-1)(t^2+4t+4)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{t^2+4t+4}{t^2+t+1} = \frac{9}{3} = 3.$$

Многочлены в числителе и знаменателе раскладываются на множители методом, описанном в задаче 3.

Ответ: 3.

Задача 20. Найти $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Сделаем замену переменной $x=t^6$. Тогда $t=\sqrt[6]{x}$. Следовательно $t\to 2$ при $x\to 64$. Получаем

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}=\lim_{t\to 2}\frac{(t^2+2t+4)}{(t+2)}=3.$$

Ответ: 3.

Задача 21. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 7x}{\cos x-\cos 4x}.$$

Решение.

Данный предел есть неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем знаменатель дроби по формуле разности косинусов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 7x}{\cos x-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 7x}{2\sin\frac{5}{2}x\cdot\sin\frac{3}{2}x}.$$

Для нахождения полученного предела применим теорему о замене бесконечно малых функций эквивалентными бесконечно малыми функциями.

Поскольку, при $x\to 0$

$$\sin 3x\sim 3x,\quad \sin 7x\sim 7x,\quad \sin\frac{5}{2}x\sim\frac{5}{2}x,\quad \sin\frac{3}{2}x\sim\frac{3}{2}x,$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 7x}{\cos x-\cos 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 7x}{2\sin\frac{5}{2}x\cdot\sin\frac{3}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 7x}{2\cdot\frac{5}{2}x\cdot\frac{3}{2}x}=\frac{14}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{14}{5}$.

Дифференцирование.

Цель данного раздела помочь студентам в овладении навыками нахождения производных функций одной переменной. Операция нахождения производной называется дифференцированием функции. Производная функции y=f(x) обозначается либо y', либо $\frac{dy}{dx}$.

Сформулируем основные правила дифференцирования и приведем формулы производных основных элементарных функций:

1. $(c)' = 0.$
2. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'.$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$
4. $(c\cdot u)' = c\cdot u'.$
5. $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}.$
6. $(\sin x)' = \cos x.$
7. $(\cos x)' = -\sin x.$
8. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
9. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
10. $(a^x)' = a^x\cdot \ln a.$
11. $(e^x)' = e^x.$
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln a}.$
13. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
16. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$
17. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Отметим, что полезно запомнить частный случай формулы 5 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Большое значение для вычисления производных различных функций имеет следующая теорема:

Теорема о производной сложной функции. Пусть $y = f(u),$ где $u = \varphi(x)$, тогда

$$y'_x = f'(u)\cdot u'(x).$$

или эта формула записывается в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Так, например, если $u = \varphi(x)$, то формулы 5, 6, 10, 13 принимают вид:

5а. $(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'.$

6а. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'.$

10а. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.

13а. $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.

<u>Задача 22</u>. Найти $\frac{dy}{dx}$., где $y = 5^{tg^4 2x^7}$.

Основная цель данной задачи приобрести навыки дифференцирования сложной функции.

Приведем подробное решение этой задачи. (Мы предполагаем, что студенты к этому моменту изучили таблицу производных основных элементарных функций.)

Функция имеет вид $y = 5^u$, где $u = tg^4 2x^7$.

Воспользуемся формулой производной сложной функции. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5^u \ln 5 \frac{du}{dx}$, где $u = tg^4 2x^7$. Функция u(x) имеет вид $u = u_1{}^4$, где $u_1 = tg 2x^7$. Получаем $\frac{du}{dx} = \frac{du}{du_1}\frac{du_1}{dx} = 4u_1{}^3 \frac{du_1}{dx}$. Функция $u_1(x)$ имеет вид $u_1(x) = tg u_2$, где $u_2 = 2x^7$. Получаем $\frac{du_1}{dx} = \frac{du_1}{du_2}\frac{du_2}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u_2}\frac{d}{dx}(2x^7) =$
$= \frac{1}{\cos^2 u_2} 14x^6$.

Теперь можем записать окончательный ответ

Ответ: $\frac{dy}{dx}. = 5^{tg^4 2x^7} \ln 5 \cdot 4 tg^3 2x^7 \cdot \frac{1}{\cos^2 2x^7} \cdot 14x^6$.

Отметим, что нет необходимости (если вы уверенно владеете техникой дифференцирования) столь подробно проводить все выкладки.

<u>Задача 23</u>. Найти $\frac{dy}{dx}$., где $y = 2^{\sin^3 5x^2}$..

Используя последовательно формулы 10, 5, 6, 4 и 5, а также правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{dy}{dx}. = \left(2^{\sin^3 5x^2}\right)' = 2^{\sin^3 5x^2} \ln 2 (\sin^3 5x^2)' = 2^{\sin^3 5x^2} \ln 2 \cdot 3\sin^2 5x^2 (\sin 5x^2)' =$$

$$= 2^{\sin^3 5x^2} \ln 2 \cdot 3\sin^2 5x^2 \cos 5x^2 (5x^2)' = 2^{\sin^3 5x^2} \ln 2 \cdot 3\sin^2 5x^2 \cos 5x^2 \, 10x.$$

Отметим, что все производные по промежуточным аргументам можно выполнять в уме и непосредственно давать готовый ответ.

<u>Задача 24</u>. Найти $\frac{dy}{dx}$., где $y = 3^{\cos^2 5x^6}$.

Ответ: $\frac{dy}{dx} = 3^{\cos^2 5x^6} \ln 3 \cdot 2\cos 5x^6 \cdot (-\sin 5x^6) 30x^5$.

Целью следующих задач является закрепления навыков нахождения производной произведения функций.

Задача 25. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $y = \sqrt[5]{\sin x} \cdot \arccos x^3$.

Используя формулу производной произведения, получаем

$$y' = \left[(\sin x)^{\frac{1}{5}}\right]' \cdot \arccos x^3 + \left[(\sin x)^{\frac{1}{5}}\right]\left(\arccos x^3\right)'.$$

Далее воспользуемся формулой производной сложной функции. Получаем

$$y' = \left[\frac{1}{5}(\sin x)^{\frac{-4}{5}}\right](\sin x)' \cdot \arccos x^3 + \left[(\sin x)^{\frac{1}{5}}\right]\left(\frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\right)\left(x^3\right)'.$$

Вычисляя табличные производные, получаем ответ.

Ответ:

$$y' = \left[\frac{1}{5}(\sin x)^{\frac{-4}{5}}\right]\cos x \cdot \arccos x^3 - \left[(\sin x)^{\frac{1}{5}}\right]\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\right)3x^2.$$

Как мы уже упоминали ранее, при уверенном владении техникой дифференцирования нет необходимости приводить столь подробное описание.

Рассмотрим еще один пример.

Задача 26. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $y = \cos\sqrt{x} \cdot arctge^x$.

Сначала воспользуемся формулой производной произведения, а затем формулой дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\cos\sqrt{x}\right)' arctge^x + \cos\sqrt{x}\left(arctge^x\right)' =$$

$$\left(-\sin\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\right)' arctge^x + \cos\sqrt{x}\,\frac{1}{1+\left(e^x\right)^2}\left(e^x\right)' =$$

$$= \left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} arctge^x + \cos\sqrt{x}\,\frac{1}{1+e^{2x}}e^x.$$

Приведем решение еще одного примера, где все промежуточные рассуждения проведены в уме.

Задача 27. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $y = \ln(1+x^7)e^{\sin 2x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^7} \cdot 7x^6 \cdot e^{\sin 2x} + \ln(1+x^7)e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x \cdot 2$$

Далее рассмотрим задачи на нахождение производной частного.

Задача 28. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $y = \dfrac{\arcsin e^{-x}}{tgx^6}$.

Используя формулу производной частного, получаем

$$y'=\left(\frac{\arcsin e^{-x}}{tgx^6}\right)'=\frac{\left(\arcsin e^{-x}\right)' tgx^6-\arcsin e^{-x}\left(tgx^6\right)'}{tg^2x^6}.$$

Далее, используя формулу производной сложной функции и соответствующие табличные производные, получаем:

$$y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(e^{-x}\right)^2}}\left(e^{-x}\right)' tgx^6-\arcsin e^{-x}\frac{1}{\cos^2 x^6}\left(x^6\right)'}{tg^2x^6}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\left(e^{-x}\right)^2}}\left(e^{-x}\right)(-x)' tgx^6-\arcsin e^{-x}\frac{1}{\cos^2 x^6}6x^5}{tg^2x^6}=$$

$$=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\left(e^{-x}\right)tgx^6-\arcsin e^{-x}\frac{1}{\cos^2 x^6}6x^5}{tg^2x^6}.$$

<u>Задача 29.</u> Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y=\frac{\sqrt[3]{tgx^3}}{\arcsin\frac{2}{x}}$..

По формуле дифференцирования частного имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{\sqrt[3]{tgx^5}}{\arcsin\frac{2}{x}}\right)'=\frac{\left(\sqrt[3]{tgx^5}\right)'\cdot\arcsin\frac{2}{x}-\sqrt[3]{tgx^5}\cdot\left(\arcsin\frac{2}{x}\right)'}{\left(\arcsin\frac{2}{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(tgx^5\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(tgx^5\right)'\cdot\arcsin\frac{2}{x}-\sqrt[3]{tgx^5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4/x^2}}\cdot\left(2\cdot x^{-1}\right)'}{\arcsin^2\frac{2}{x}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{tg^2x^5}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x^5}\cdot 5x^4\cdot\arcsin\frac{2}{x}-\sqrt[3]{tgx^5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4/x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{\arcsin^2\frac{2}{x}}.$$

Приведем решение еще одного примера, все промежуточные выкладки в котором сделаны в уме.

<u>Задача 30.</u> Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y=\frac{\sin^3 x^2}{3^{x^5}}$.

$$y'=\frac{3\sin^2 x^2\cdot\cos x^2\cdot 2x\cdot 3^{x^5}-\sin^3 x^2\cdot 3^{x^5}\ln 3\cdot 5x^4}{3^{2x^5}}.$$

Для решения следующих задач используется метод логарифмического дифференцирования. Суть этого метода состоит в использовании равенства:

$$y' = y(\ln y)' \ .$$

Подобный прием применяется для нахождения производных функций вида $y = [u(x)]^{v(x)}$, а так же функций представляющих собой произведение большого числа множителей.

Схему этого метода изложим сначала на примере.

Задача 31. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y = \left(x^2+1\right)^{ctgx}$. (1)

Данная функция является сложной показательной функцией. Для ее дифференцирования используем логарифмическую производную. Опишем процесс нахождения производной сложной показательной функции.

Прологарифмируем равенство (1):

$\ln y = \ln\left(\left(x^2+1\right)^{ctgx}\right)$. Затем запишем правую часть равенства в виде произведения, применив свойство логарифмической функции:

$\ln y = ctgx \cdot \ln\left(x^2+1\right)$. Продифференцируем получившееся равенство:

$$(\ln y)' = \left(ctgx \cdot \ln\left(x^2+1\right)\right)'; \ \frac{1}{y}\cdot y' = (ctgx)' \cdot \ln\left(x^2+1\right) + ctgx \cdot \left(\ln\left(x^2+1\right)\right)';$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{-1}{\sin^2 x}\cdot \ln\left(x^2+1\right) + ctgx \cdot \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x.$$

Выразим из последнего равенства искомую производную y':

$y' = y\cdot\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot \ln\left(x^2+1\right) + ctgx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right)$. И, наконец, подставим вместо функции y ее выражение через x:

$$y' = \left(x^2+1\right)^{ctgx}\cdot\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot \ln\left(x^2+1\right) + ctgx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Задача 32. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $y = \frac{(x+1)^5\sqrt[3]{x+4}}{(x-1)^6(x+3)^2}$.

Прологарифмируем данное выражение:

$$\ln y = 5\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x+4) - 6\ln(x-1) - 2\ln(x+3)\ .$$

Возьмем производную от правой и левой части данного соотношения:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{5}{x+1} + \frac{1}{3(x+4)} - \frac{6}{x-1} - \frac{2}{x+3}\ .$$

Тогда $y' = \frac{(x+1)^5\sqrt[3]{x+4}}{(x-1)^6(x+3)^2}\cdot\left[\frac{5}{x+1} + \frac{1}{3(x+4)} - \frac{6}{x-1} - \frac{2}{x+3}\right]$.

Далее рассмотрим задачи, решение которыхи требует знания понятия производной высших порядков. Напомним, что производная порядка n обозначается $\frac{d^n y}{dx^n}$ или $y^{(n)}$. Общая формула вычисления производных высших порядков выглядит следующим образом $y^{(n)} = \left(y^{n-1}\right)'$.

<u>Задача 33.</u> Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, если $y = e^{2x} \cdot \sin 3x.$

<u>Решение</u>. Напомним, что вторая производная есть первая производная от первой производной функции:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Найдем первую производную функции:

$\dfrac{dy}{dx} = \left(e^{2x}\right)' \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot (\sin 3x)'$; $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x} \cdot \sin 3x + e^{2x} \cdot 3\cos 3x.$

А теперь еще раз продифференцируем полученную функцию:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2\left(e^{2x}\right)' \cdot \sin 3x + 2e^{2x}(\sin 3x)' + 3\left(e^{2x}\right)' \cos 3x + 3e^{2x}(\cos 3x)' =$$

$$= 2e^{2x} 2 \cdot \sin 3x + 2e^{2x} \cos 3x \cdot 3 + 3e^{2x} 2 \cdot \cos 3x + 3e^{2x}(-\sin 3x)3.$$

Итак, после приведения подобных слагаемых имеем искомую производную:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -5e^{2x} \sin 3x + 12e^{2x} \cos 3x.$$

<u>Задача 34.</u> Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, если $y = \sin x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(2x\cos x^2\right) = 2(x)'\cos x^2 + 2x\left(\cos x^2\right)' =$$

$$2\cos x^2 + 2x\left(-\sin x^2\right)2x = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2\right) = 2(-\sin x^2)(x^2)' - 4(x^2)'\sin x^2 - 4x^2\left(\sin x^2\right)' =$$

$$= 2(-\sin x^2)2x - 4 \cdot 2x \sin x^2 - 4x^2\left(\cos x^2\right)2x = -12x\sin x^2 - 8x^3 \cos x^2.$$

Далее вспомним правила дифференцирования функций заданных параметрически. Применение этих правил мы покажем на решении конкретной задачи.

<u>Задача 35.</u> Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases}.$$

<u>Решение</u>. Первая производная функции, заданной параметрически находится по формуле:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$, где $\frac{dx}{dt}=3\sin^2 t\cos t$ и $\frac{dy}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$, тогда

$\frac{dy}{dx}=\frac{-3\cos^2 t\sin t}{3\sin^2 t\cos t}=-\frac{\cos t}{\sin t}=-ctgt$. Чтобы вычислить вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$, представим первую производную $\frac{dy}{dx}$ как некоторую функцию, заданную параметрически и возьмем от нее первую производную по переменной x:

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$, где $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(-ctgt\right)=\frac{1}{\sin^2 t}$, тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{3\sin^2 t\cos t}=\frac{1}{3\sin^4 t\cos t} .$$

<u>Задача 36.</u> Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x = arctgt \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$$

Поскольку $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{1+t^2}\left(1+t^2\right)'=\frac{2t}{1+t^2}$, то $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$=2t.

Тогда $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}(2t)}{\frac{1}{1+t^2}}=2\left(1+t^2\right)$.

Прежде чем перейти к решению следующей задачи, напомним геометрический смысл производной.

Производная в данной точке равна тангенсу угла наклона к оси X касательной к графику функции , проведенной в этой точке.

<u>Задача 37.</u> Найти уравнение касательной и нормальной прямой для графика функции, заданной параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=\cos^3 t \end{cases} \text{ при } t=\frac{\pi}{3}.$$

<u>Решение.</u> Уравнение касательной имеет вид:

$$y-y_0=y'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Нормальная прямая перпендикулярна касательной и имеет угловой коэффициент $k=-\frac{1}{y'(x_0)}$, уравнение нормали таково:

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}\cdot(x-x_0).$$

Вычислим координаты точки (x_0,y_0), соответствующей значению параметра $t=\frac{\pi}{3}$:

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8},\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}.$$

Производная $\frac{dy}{dx}$ была найдена в предыдущей задаче. Она равна

$$\frac{dy}{dx}=-ctgt.$$

вычислив ее значение при $t=\frac{\pi}{3}$, получаем $y'=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда уравнение касательной имеет вид:

$$y-\frac{1}{8}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$$

Уравнение нормали соответственно:

$$y-\frac{1}{8}=\sqrt{3}\cdot\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$$

<u>Задача 38.</u> Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции $y(x)$, заданной неявно следующим уравнением:

$$x^2+xy+y^2-2x-3y+1=0 \quad \text{в точке М(1;2).}$$

<u>Решение</u>. Продифференцируем уравнение, задающее функцию $y(x)$, помня о том, что

y -- функция переменной x:

$$2x+x'\cdot y+x\cdot y'+2y\cdot y'-2-3y'=0,$$

$$2x+y+x\cdot y'+2y\cdot y'-2-3y'=0.$$

Далее перенесем слагаемые, не содержащие y' в правую часть равенства, а в левой части вынесем за скобки y':

$$x\cdot y'+2y\cdot y'-3y'=2-2x-y;\quad y'\cdot(x+2y-3)=2-2x-y$$

Затем выразим из последнего равенства y':

$$y'=\frac{2-2x-y}{x+2y-3}.$$

В точке М(1;2) имеем $y'=\frac{2-2\cdot1-2}{1+2\cdot2-3}=-1$.

Для нахождения второй производной продифференцируем соотношение $2x+y+x\cdot y'+2y\cdot y'-2-3y'=0$ еще один раз по х.

$(2x)'+y'+(xy')'+2(yy')'-(3y')'=0$;

$2+y'+y'+xy''+2y'y'+2yy''-3y''=0$.

В точке М(1;2) нам известно, что х=1, у=2, $y'=-1$. Подставляя в полученное соотношение, получаем уравнение для определения второй производной:

$2-1-1+y''+2+4y''-3y''=0$; $2y''=-2$; $y''=-1$.

Задача 39. Найти уравнение касательной и нормали к кривой, заданной неявно уравнением:

$$x^2+xy+y^2-2x-3y+1=0 \text{ в точке М(1;2).}$$

Уравнение касательной имеет вид: $y-y_0=y'(x_0)\cdot(x-x_0)$. В данной точке $x_0=1$, $y_0=2$, $y'(x_0)$ найдена при решении предыдущей задачи, при этом $y'(x_0)=-1$.

Уравнение касательной имеет вид у-2=–(х-1), а нормали у-2= (х-1).

Задача 40. Найти d^2y функции $y=x^2\sin 3x$.

Напомним формулу вычисления дифференциала порядка n:

$$d^n y=y^{(n)}dx^n. \text{ (в частности, } d^2y=y''dx^2\text{).}$$

Найдем вторую производную.

$y'=2x\sin 3x+3x^2\cos 3x$.

$y''=(2x\sin 3x+3x^2\cos 3x)'=2\sin 3x+6x\cos 3x+6x\cos 3x-9x^2\sin 3x=$

$=2\sin 3x+12x\cos 3x-9x^2\sin 3x$.

Получаем $d^2y=(2\sin 3x+12x\cos 3x-9x^2\sin 3x)\,dx^2$.

Задача 41. С помощью дифференциала функции вычислить приближенно $\sqrt{25{,}5}$.

Суть применения дифференциала к приближенным вычислениям состоит в замене приращения функции ее дифференциалом, то есть используется приближенное равенство

$$y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0)+y'(x_0)\Delta x.$$

В данной задаче: $y=\sqrt{x}$; $x_0+\Delta x=25{,}5$; $x_0=25$; $\Delta x=0{,}5$; $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

$y'(x_0)=\dfrac{1}{10}$.

Имеем $\sqrt{25{,}5}=\sqrt{25+0{,}5}\approx\sqrt{25}+\dfrac{1}{10}0{,}5=5{,}05$.

Исследование функций и построение графиков.
Далее вспомним методы дифференциального исчисления, используемые для исследования функций и построения их графиков.

Дифференциальное исчисление широко используется для исследования функций с целью построения их графиков.

Прежде чем перейти к рассмотрению первой задачи напомним некоторые моменты теории. Дадим определение локального максимума и минимума функции.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $y(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек x, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $y(x_0) > y(x)$ ($y(x_0) < y(x)$).

Точки локального максимума и локального минимума называются точками экстремума функции.

Сформулируем теорему о необходимом условии существование экстремума.

Теорема. Точками экстремума непрерывной функции могут быть только такие точки, в которых ее производная или равна нулю или не существует.

Точки, в которых производная или равна нулю или не существует будем называть критическими точками.(Достаточные условия экстремума будут сформулированы несколько позднее.)

Задача 42. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке.

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 2, \quad [-2,2].$$

В этой задаче требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции, заданной на некотором отрезке и непрерывной на этом отрезке. Из свойств непрерывной функции известно, что функция непрерывная на отрезке принимает на этом отрезке свое наибольшее и наименьшее значения. Если наибольшее или наименьшее значение достигается внутри отрезка, то эта точка является точкой экстремума, а значит критической точкой. Следовательно для определения наибольшего и наименьшего значений функции на некотором отрезке и непрерывной на этом отрезке может быть предложена следующая схема.

1. Находим производную функции.

2. Определяем критические точки (в которых производная или равна нулю или не существует) и выбираем те, которые лежат на данном отрезке.
3. Вычисляем значения функции в выбранных точках и на концах отрезка. Среди вычисленных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Решение.

Найдем критические точки функции, для чего вычислим производную функции и приравняем ее нулю:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3}{4}-\frac{2}{3}\cdot 3x^2;\ \frac{dy}{dx}=x^3-2x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{при} \quad x^3-2x^2=0;\ \ x^2(x-2)=0,$$

откуда находим критические точки: $x_1=0,\ \ x_2=2$.

Далее необходимо выбрать те критические точки, которые принадлежат заданному отрезку. В данном случае обе критические точки ему принадлежат. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка и выберем наибольшее и наименьшее значения функции:

$$y(-2)=\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2}{3}\cdot(-2)^3+2=\frac{34}{3}.$$

$$y(0)=2.$$

$$y(2)=\frac{2^4}{4}-\frac{2}{3}\cdot 2^3+2=\frac{2}{3}.$$

Делаем вывод о том, что свое наибольшее значение на заданном отрезке функция достигает при $x=-2$, $y(-2)=\frac{34}{2}$, а наименьшее значение при $x_1=2$, $y(2)=\frac{2}{3}$.

<u>Задача 43.</u> Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке.

$$y=\sin 2x-x, \qquad [0;\pi].$$

Находим производную: $y'=2\cos 2x-1$.

Находим критические точки: $2\cos 2x-1=0$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+n\pi$.

На отрезке $[0;\pi]$ лежат $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5\pi}{6}$.

Вычисляем значения функции: $y(0)=0$; $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}$; $y(\pi)=-\pi$.

Наибольшее значение: $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$.

Наименьшее значение: $y\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}$.

Общая схема следующих задач состоит в следующем. Требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины (назовем ее S), зависящей от двух параметров (обозначим их a и b) S(a, b).

При этом параметры a и b не являются не зависимыми, а связаны соотношением F(a, b)=0. Условия задачи позволяют определить возможную область изменения параметров. Это может быть отрезок или интервал.

Можно предложить следующий метод решения. Из соотношения F(a, b)=0 один параметр может быть выражен через другой. Например, $b=b(a)$. Тогда функция S становится функцией одного параметра a S=S(a,$b(a)$). Если область возможного изменения параметра является отрезком, то дальнейшее решение в точности совпадает с решением предыдущей задачи. Если область изменения параметра является интервалом, то полезно воспользоваться следующим фактом.

Если на некотором интервале функция имеет единственную точку экстремума и эта точка является точкой максимума (минимума), то значение функции в этой точке будет наибольшим (наименьшим) на всем интервале.

Сформулируем достаточные условия экстремума функции.

Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то эта точка является точкой максимума (минимума) функции. (Предполагается, конечно, что функция определена и непрерывна в данной точке.)

Задача 44. Прямоугольный участок огорожен с трех сторон забором периметра 4р. При каких размерах сторон площадь участка S будет наибольшей.

Решение. Обозначим a и b размеры сторон прямоугольника. Тогда S=$a\,b$. Параметры a и b не являются независимыми, а связаны соотношением (длина забора) $a+2b$=4р. Тогда a=4р–2b. Следовательно, функцию S можно представить как функцию одного параметра b: S=b(4р–2b) .

Из условия задачи ясен, что параметр b может изменяться на следующем отрезке $0\le b\le 2p$. То есть задача сводится к отысканию наибольшего значения функции S=S(b)=b(4р–2b) на отрезке $[0;2p]$.

Найдем производную: $\frac{ds}{db}=4p-4b$. Приравнивая ее нулю, получаем b=p. Найденная точка лежит на отрезке $[0;2p]$.

Вычисляем S(0)=0, S(2p)=0, $S(p)=2p^2$- это значение и является наибольшим. Тогда размеры сторон равны: a=2p, b=p.

<u>Задача 45.</u> Объем цилиндрической цистерны равен V. При каких размерах площадь ее полной поверхности будет наименьшей.

Решение. Цилиндрическая цистерна характеризуется двумя параметрами: радиусом основания R и высотой H. Площадь полной поверхности выражается формулой S=2πR^2+2πRH. Параметры R и H не являются независимыми (известен объем), а связаны соотношением V=πR^2H. Тогда H=$\frac{V}{\pi r R^2}$. Подставляя H в выражение для площади полной поверхности, получим S как функцию одной переменной S(R)= 2π$R^2+\frac{2V}{R}$. Возможная область изменения параметра R интервал (0;∞).

Найдем производную: $\frac{dS}{dR}$=4πR–$\frac{2V}{R^2}$. Приравнивая ее нулю, получаем R=$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Заметим что: $\frac{dS}{dR}$<0 при R<$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $\frac{dS}{dR}$>0 при R>$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Поскольку при переходе через данную критическую точку производная меняет знак с минуса на плюс, то эта точка является точкой минимума. Поскольку на интервале (0;∞) данная точка является единственной точкой экстремума, то значение функции в этой точке будет наименьшим. Получаем, что цистерна имеет наименьшую полную поверхность при R=$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, H=$\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ =2R.

<u>Задача 46.</u> На странице книги печатный текст (вместе с промежутками между строками) должен занимать $216\,см^2$. Верхнее и нижнее поля должны быть по $3\,см$, правое и левое – по $2\,см$. Каковы должны быть размеры страницы для того, чтобы ее площадь была наименьшей?

<u>Решение.</u> Исследуемая величина, для которой нам предлагается отыскать наименьшее значение, есть площадь печатной страницы. Обозначим ширину печатного текста через x, а длину -- через y. Площадь всей страницы можно найти по формуле: S=(x+4)(y+6),
S=xy+6x+4y+24. Таким образом, мы выразили функцию, для которой необходимо найти наименьшее значение, как функцию двух переменных. Используем данную в условии задачи площадь

печатного текста $xy = 216$, тогда $y = \dfrac{216}{x}$ и выразим площадь страницы как функцию переменной x:

$$S(x) = 216 + 6x + 4 \cdot \frac{216}{x} + 24; \quad S(x) = 240 + 6x + \frac{864}{x}.$$

Из условия задачи вытекают естественные ограничения на значения переменной x: $0<x<\infty$. Таким образом, мы решаем задачу о нахождении наименьшего значения функции на заданном интервале. Найдем критические точки функции, приравняв ее производную нулю.

$$\frac{dS}{dx} = 6 - \frac{864}{x^2} = \frac{6x^2 - 864}{x^2} = \frac{6(x-12)(x+12)}{x^2}; \quad \frac{dS}{dx} = 0 \text{ при } x = \pm 12.$$

В соответствии с ограничениями, наложенными на x, рассматриваем критическую точку $x = 12$, принадлежащую заданному интервалу. Определим, с помощью достаточного условия экстремума, будет ли найденная точка точкой локального максимума функции. Для этого проверим знак производной в окрестности точки $x = 12$.

При $x<12$ имеем $\dfrac{dS}{dx}<0$, при $x>12$ имеем $\dfrac{dS}{dx}>0$. Данная точка является точкой минимума. Поскольку эта точка является единственной критической точкой интервале, то значение в этой точке будет наименьшим.

Таким образом, площадь печатной страницы будет наименьшей, если ее длина равна $18\,см$, а ширина $12\,см$.

Далее рассмотрим полную схему исследования функции и построения ее графика. Основные требования мы приведем на примере решения конкретной задачи.

<u>Задача 47.</u> Методами дифференциального исчисления провести полное исследование функции и построить ее график: $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

Эту задачу мы рассмотрим более подробно. Непосредственно в ходе решения мы будем приводить некоторые моменты теории. Схему построения графика мы покажем по шагам, предполагая, что в начале график строится на черновике, то есть схематично.

Полное исследование включает следующие моменты.

1. Область определения функции (ОДЗ).

Исследуемая функция $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$ определена на всей числовой оси за исключением тех точек, где знаменатель обращается в ноль.

Найдем эти точки: $1 - x^2 = 0$; $x = \pm 1$.

Следовательно, ОДЗ данной функции является вся числовая ось за исключением точек $x = \pm 1$.

2. Четность, нечетность функции.

Напомним, что: функция называется четной, если y(-x)=y(x); функция называется нечетной, если y(-x)=-y(x). Напомним, что четная функция симметрична относительно оси Y, нечетная симметрична относительно начала координат. Если функция не является ни четной, ни нечетной, то говорят, что данная функция является функцией общего вида.

Для исследуемой функции имеем: $y(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$;

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, исследуемая функция является нечетной.

3. Нули, точки разрыва, точки пересечения графика с осями координат.

Для определения нулей функции решаем уравнение y(x)=0.

Имеем: $\dfrac{x^3}{1-x^2} = 0$; x=0. Следовательно, исследуемая функция обращается в ноль в единственной точке x=0.

Элементарная функция имеет точки разрыва только в тех точках, где она не определена. Следовательно, исследуемая функция имеет две точки разрыва $x = -1$, $x = 1$.

График функции пересекается с осью X в тех точках, где она равна нулю. Эти точки уже найдены.

Определим точку пересечения с осью Y. Имеем y(0)=0.

Отметим, что в данной задаче точка пересечения с осью X и точка пересечения с осью Y совпали, то есть график функции проходит через начало координат.

4. Интервалы знакопостоянства функции.

Для определения интервалов знакопостоянства функции напомним следующий факт.

Функция может изменить свой знак лишь при переходе через такие точки, в которых она равна нулю или имеет точку разрыва.

Исследуемая функция равна нулю при x=0. Имеет точки разрыва при x=-1 и x=1. Эти точки разбивают числовую ось на интервалы: $(-\infty;-1)$; $(-1;0)$; $(0;1)$; $(1;\ \infty)$. На каждом из интервалов функция сохраняет постоянный знак. Чтобы определить знак функции на любом интервале, достаточно ее вычислить в любой точке интервала. Например, определим знак на интервале (0;1). Возьмем точку $x = \dfrac{1}{2}$, лежащую на этом интервале. Вычислим

$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{6}$ >0. Следовательно, исследуемая функция положительна на интервале (0;1). Аналогично исследуются знаки функции на остальных интервалах. Результаты удобно свести в таблицу.

x (интервал изменения)	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
y (знак функции)	+	−	+	−

5. Асимптоты графика функции.

5а. Вертикальные асимптоты.

Напомним, что прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции y=y(x), если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0} y(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} y(x)$ равен бесконечности. Вертикальные асимптоты могут быть только в точках разрыва функции.

В исследуемой функции имеются две точки разрыва. При стремлении к этим точкам знаменатель дроби стремится к нулю, а числитель к ненулевой конечной величине. Следовательно, выражение будет стремиться к бесконечности. Знак бесконечности можно определить из таблицы интервалов знакопостоянства функции. Например, в окрестности точки x=-1 (x<-1) функция положительна. Следовательно

$$\lim_{x\to -1-0} y(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty .$$

Аналогично:

$$\lim_{x\to -1+0} y(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty ;$$

$$\lim_{x\to 1-0} y(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{1-x^2}=+\infty ;$$

$$\lim_{x\to 1+0} y(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{1-x^2}=-\infty .$$

5б. Наклонные асимптоты.

Напомним, что прямая y=kx+b является наклонной асимптотой графика функции y=y(x) при x→+∞, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(y(x)-kx-b\big)=0$.

Достаточные условия существования асимптот и формулы для нахождения параметров k и b имеют вид.

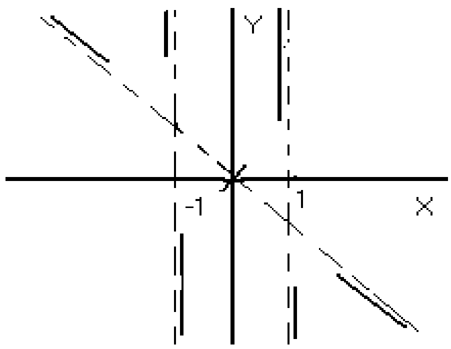
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x};\; b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx).$$

Если хотя бы один из этих пределов не существует или равен бесконечности, то функция не имеет асимптот при x→+∞.
Аналогично определяется асимптота при x→–∞.
В исследуемой задаче асимптоты при x→–∞ и при x →+∞ одинаковы. Поэтому мы будем рассматривать предел при x →∞.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x-x^3}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1} = 0.$$

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид y=-x.
С этого момента на черновике можно начинать строить схему графика. Нанесем точки пересечения с осями координат, асимптоты и поведение функций около асимптот.



6. Интервалы возрастания, убывания функции. Точки экстремума.

Напомним достаточные условия возрастания (убывания) на отрезке. Если производная функции положительна (отрицательна) во всех точках отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом отрезке.

Необходимые и достаточные условия экстремума были сформулированы ранее.

6а. Найдем производную функции.

$$y'(x) = \left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)' = \frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

6б. Определим интервалы знакопостоянства производной. Интервалы возрастания и убывания функции.

Интервалы знакопостоянства производной определяются по той же схеме, что и ранее определялись интервалы знакопостоянства функции.

Производная имеет точки разрыва при x=-1, x=1.

Производная равна нулю: $3x^2 - x^4 = 0$; $x^2(3-x^2) = 0$; x=0, $x = -\sqrt{3}$, x=$\sqrt{3}$. $(-\sqrt{3}; -1)$

Точки x=-1, x=1, x=0, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$ разбивают числовую ось на 6 интервалов. Как и ранее определяем знак производной на каждом интервале. На основании знака производной делаем вывод о характере поведения функции на интервале (возрастание или убывание). Результаты удобно свести в таблицу. В таблице знак ↗ указывает на возрастание функции, знак ↘ на убывание.

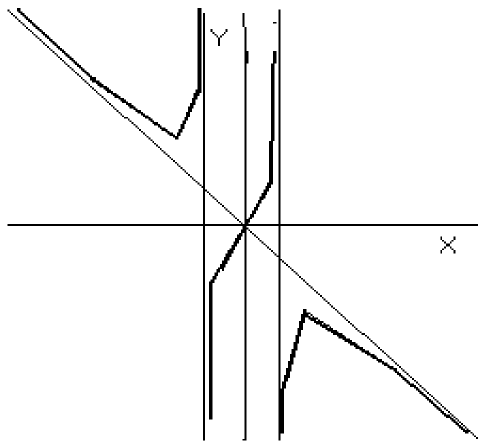
x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};-1)$	(-1;0)	(0;1)	$(1;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};\infty)$
y′	–	+	+	+	+	–
y	↘	↗	↗	↗	↗	↘

6в. Точки экстремума функции. Точками экстремума могут быть только те точки, в которых производная или равна нулю или не существует.

У исследуемой функции таких точек пять: x=-1, x=1, x=0, $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$. В точках x=-1, x=1 функция не определена, а значит, они не могут быть точками экстремума.

При переходе через точку x=0 знак производной не изменяется, а значит, она не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x=-\sqrt{3}$ производная меняет свой знак с минуса на плюс и, следовательно, точка $x=-\sqrt{3}$ является точкой минимума. При переходе через точку $x=\sqrt{3}$ производная меняет свой знак с плюса на минус и, следовательно, точка $x=\sqrt{3}$ является точкой максимума.



Вычислим значения функции в точках экстремума: точка $x=-\sqrt{3}$ является точкой минимума, $y(-\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

точка $x=\sqrt{3}$ является точкой максимума, $y(\sqrt{3})=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

С учетом проведенного исследования уже может быть построен схематичный график.

7. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции.

Напомним некоторые понятия. Функция называется выпуклой (вогнутой) на некотором отрезке, если ее график лежит ниже (выше) касательной, проведенной в любой точке этого отрезка.

Сформулируем достаточные условия. Если вторая производная функции отрицательна (положительна) на отрезке, то данная функция является выпуклой (вогнутой) на этом отрезке.

Точкой перегиба называется такая точка, в которой существует касательная, и в окрестности которой график функции лежит по разные стороны касательной.

Достаточные условия точки перегиба формулируются следующим образом. Если в некоторой точке определена первая производная и при переходе через эту точку вторая производная меняет свой знак, то такая точка является точкой перегиба.

7а. Находим вторую производную.

$$y''(x)=\left(\frac{3x^2-x^4}{\left(1-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(6x-4x^3\right)\left(1-x^2\right)^2-\left(3x^2-x^4\right)2\left(1-x^2\right)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^4}=2x\frac{x^2+3}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

7б. Находим нули и точки разрыва второй производной, интервалы знакопостоянства второй производной. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости функции.

Вторая производная равна нулю только в одной точке: x=0. Вторая производная имеет точку разрыва в точках: x=-1, x=1.

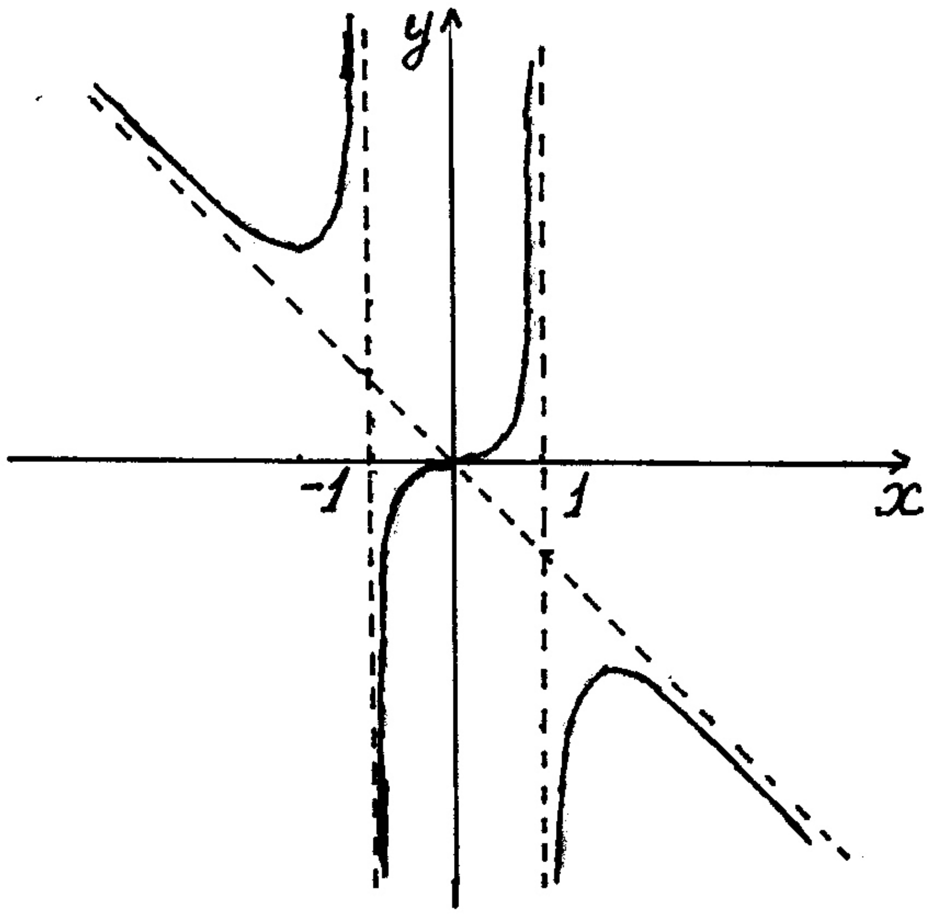
Как и в предыдущем случае определяем интервалы знакопостоянства, и на основании знака второй производной делаем вывод о выпуклости или вогнутости функции. Результаты удобно свести в таблицу. В таблице выпуклость функции будем обозначать символическим знаком $\cap$, вогнутость знаком $\cup$.

x	(-∞;-1)	(-1;0)	(0;1)	(1;+ ∞)
y″	+	–	+	–
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

7в. Точки перегиба.

Вторая производная меняет знак в точках: x=-1; x=0; x=1. Однако в точках x=-1 и x=1 функция не определена. Поэтому точкой перегиба является единственная точка x=0. Значение функции в этой точке y(0)=0.

С учетом исследования на выпуклость и вогнутость подправляем полученный ранее график плавной кривой. Таким образом, получаем окончательный вид графика функции.



Задача 48. Методами дифференциального исчисления провести полное исследование функции и построить ее график: $y = \frac{\ln x}{x}$.

1.Область определения функции (ОДЗ).

Функция $y = \frac{\ln x}{x}$ определена при x>0.

2. Четность, нечетность функции.

Поскольку функция не определена при $x \le 0$, то данная функция является функцией общего вида.

3. Нули, точки разрыва, точки пересечения графика с осями координат.

Нули функции. Решаем уравнение y(x)=0.

Имеем: $\frac{\ln x}{x}$=0; x=1. Следовательно, исследуемая функция обращается в ноль в единственной точке x=1.

Данная функция непрерывна на всей области допустимых значений.

Точка пересечения с осью X, точка x=1.

Поскольку функция не определена при x=0, то ее график не пересекается с осью Y.

4. Интервалы знакопостоянства функции.

В области допустимых значений знак функции может меняться в единственной точке x=1. Точка x=1 разбивает область допустимых значений на два интервала (0;1) и (1; ∞). Определяем значения функции на каждом интервале и результаты сводим в таблицу.

x	(0;1)	(1;+∞)
y	–	+

5. Асимптоты графика функции.

5а. Вертикальные асимптоты.

В области допустимых значений функция непрерывна. Поэтому асимптоты могут быть только на границе области допустимых значений.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x}=-\infty .$$

5б. Наклонные асимптоты.

$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}$. Данный предел является пределом вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Применяем правило Лопиталя. $k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=0$.Поскольку k=0, то :

$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1}=0$. (При вычислении предела использовано правило Лопиталя.)

Таким образом уравнение асимптоты при $x\to+\infty$ имеет вид y=0.

6. Интервалы возрастания, убывания функции. Точки экстремума.

Находим производную:

$$y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

В области допустимых значений производная не имеет точек разрыва.

Нули производной находим, решая уравнение $\frac{1-\ln x}{x^2}$=0; $\ln x=1$; $x=e$.

Точка $x=e$ разбивает область допустимых значений на два интервала $(0;e)$ и $(e;+\infty)$. Определяем знаки производной на каждом интервале и по знакам производной определяем интервалы возрастания и убывания функции. Результаты сводим в таблицу.

x	$(0;e)$	$(e;+\infty)$
y′	+	–
y	$\nearrow$	$\searrow$

В точке $x=e$ производная меняет знак с плюса на минус. Значит, точка $x=e$ является точкой максимума функции. Вычислим значение функции в этой точке. Имеем $y(e)=\frac{1}{e}$.

7. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции.
Находим вторую производную

$$y''=\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$$

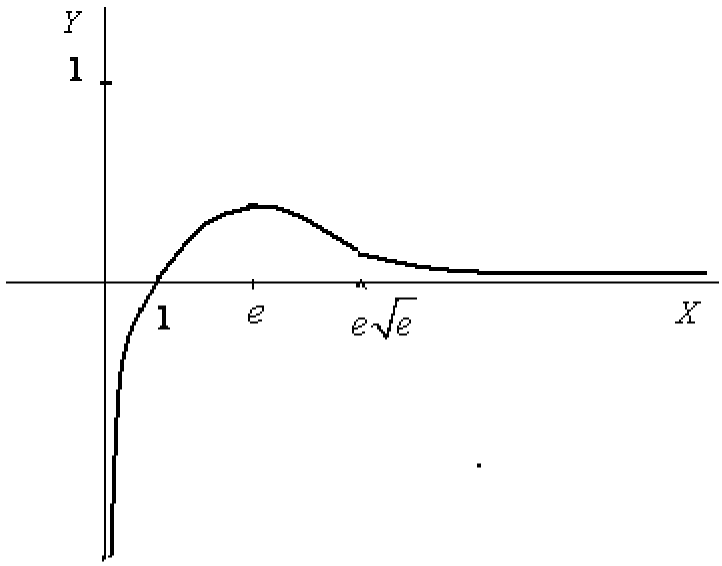
В области допустимых значений вторая производная точек разрыва не имеет. Для определения точек, в которых она равна нулю, решаем уравнение $\frac{2\ln x-3}{x^3}$=0; $2\ln x=3$; $x=e^{\frac{3}{2}}$; $x=e\sqrt{e}$.

Определяем интервалы знакопостоянства второй производной и интервалы выпуклости и вогнутости функции. Результаты сводим в таблицу.

x	$(0;e\sqrt{e})$	$(e\sqrt{e};+\infty)$
y″	–	+
y	$\cap$	$\cup$

Вторая производная меняет знак в точке x=$e\sqrt{e}$,следовательно, эта точка является точкой перегиба. Вычислим значение функции в этой точке. Имеем $y(e\sqrt{e})=\frac{3}{2e}$.

На основании проведенного исследования строим график функции.



Задача 49. $y=(2x+3)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

1. Область определения данной функции – вся числовая ось.
2. Четность, нечетность функции.

Имеем $y(-x)=(-2x+3)e^{\frac{x}{2}}$. Данная функция не является ни четной, ни нечетной.

3.Нули, точки разрыва, точки пересечения графика с осями координат.

Поскольку данная функция элементарная и определена на всей числовой оси, то она непрерывна на всей числовой оси.

Для определения нулей функции решаем уравнение $(2x+3)e^{-\frac{x}{2}}=0$;

2x+3=0; $x=-\frac{3}{2}$.

4.Интервалы знакопостоянства функции.

Функция может изменить знак только в одной точке $x=-\frac{3}{2}$.

Определим интервалы знакопостоянства функции.

x	$\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$
y	–	+

$y=(2x+3)\cdot e^{-\frac{x}{2}}>0$ при $(2x+3)>0,\quad x>-\frac{3}{2}$.

$y<0$ при $x<-\frac{3}{2}$.

Найдем точки пересечения с осями:

y=3 при x=0, следовательно $(0{,}3)$-- точка пересечения с осью OY.

$y=0$ при $x=-\dfrac{3}{2}$, следовательно $\left(-\dfrac{3}{2},0\right)$-- точка пересечения с осью OX.

5. Асимптоты графика функции.

5а. Вертикальные асимптоты.

Поскольку функция непрерывна на всей числовой оси, то вертикальных асимптот нет.

5б. Наклонные асимптоты.

Учитывая разное поведение функции $y=e^x$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$, будем искать асимптоты по отдельности для $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)e^{-\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{x}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}=2\cdot\frac{1}{+\infty}=0$$

.

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left((2x+3)e^{-\frac{x}{2}}-0\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)}{e^{\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+3)'}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

.

Отметим, что во втором пределе присутствует неопределенность вида $0\cdot\infty$, которую мы обратили в неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Далее предел вычисляется по правилу Лопиталя, в соответствии с которым предел отношения при наличии неопределенности равен отношению производных числителя и знаменателя. Итак, при $x\to+\infty$ график исследуемой функции имеет горизонтальную асимптоту, совпадающую с осью OX: y=0.

Выясним, существует ли наклонная асимптота при $x\to-\infty$.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+3)e^{-\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+3)}{x}\lim_{x\to-\infty}e^{-\frac{x}{2}}=2(+\infty)=+\infty$$

Поскольку коэффициент k не имеет конечного значения, делаем вывод о том, что график не имеет наклонной асимптоты при $x\to-\infty$.

6. Интервалы возрастания, убывания функции. Точки экстремума.

Находим производную:

$$\frac{dy}{dx}=\left((2x+3)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right)'=(2x+3)'\cdot e^{-\frac{x}{2}}+(2x+3)\cdot\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'=2e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}(2x+3)e^{-\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(2-x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right),\quad \frac{dy}{dx}=0 \text{ при } x=\frac{1}{2}.$$

Точек разрыва производная не имеет. Определяем интервалы знакопостоянства первой производной и интервалы возрастания и убывания функции. Производная может изменить знак в единственной точке $x=\frac{1}{2}$. Составляем таблицу.

x	$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$
y′	+	–
y	↗	↘

Производная в точке $x=\frac{1}{2}$ меняет знак с плюса на минус.

Следовательно точка $x=\frac{1}{2}$ является точкой максимума функции.

Вычислим значение функции в этой точке. $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\sqrt[4]{e}}$.

7. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба графика функции.
Находим вторую производную

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)'=\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)+e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)-e^{-\frac{x}{2}}=$$

$$=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x-1\right)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right).$$

В области допустимых значений вторая производная точек разрыва не имеет. Вторая производная равна нулю при x=$\frac{5}{2}$.

Определяем интервалы знакопостоянства второй производной и интервалы выпуклости и вогнутости функции.

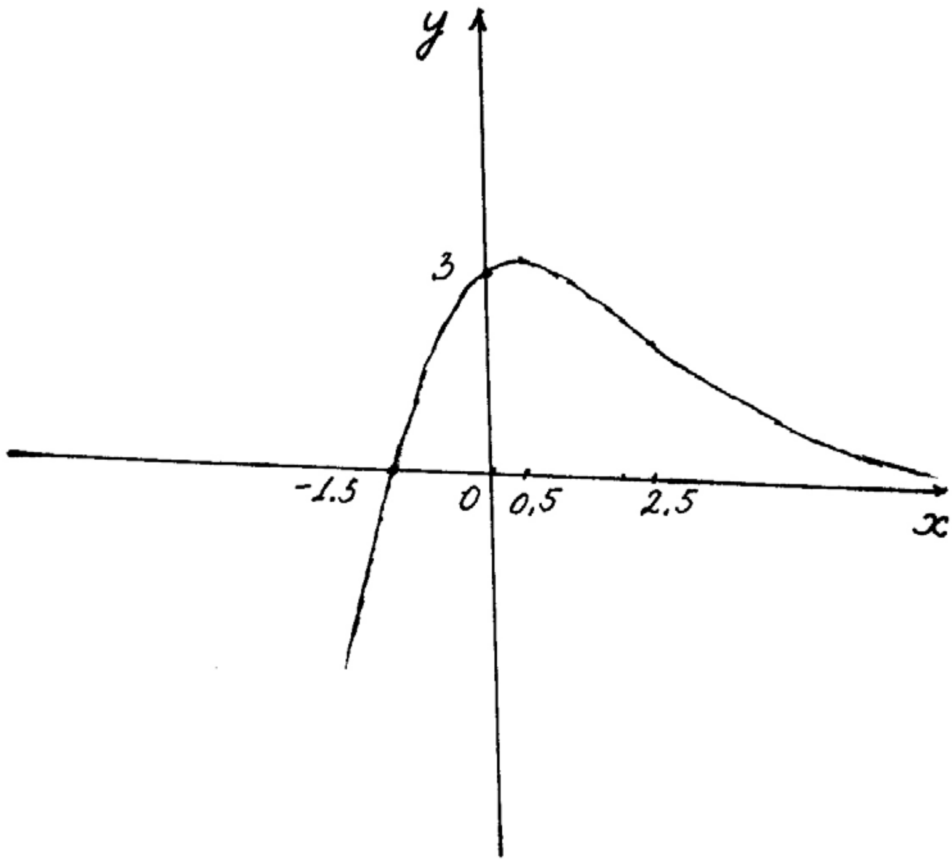
Результаты сводим в таблицу.

x	$\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$
y″	–	+

y	$\cap$	$\cup$

Вторая производная меняет знак в точке x=$\frac{5}{2}$, следовательно эта точка является точкой перегиба. Вычислим значение функции в этой точке. Имеем $y\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{8}{\sqrt[4]{e^5}}$.

На основании проведенного исследования строим график функции.



Правило Лопиталя.

Кроме способов, рассмотренных выше, весьма эффективным способом вычисления пределов является правило Лопиталя, которое использует понятие производной.

Сформулируем правило Лопиталя:

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных (если последний предел существует):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя можно применять в случае наличия неопределенности $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Подчеркнем, что правило Лопиталя можно применять только к отношению двух функций и только при наличии неопределенности. Рассмотрим примеры.

Задача 49. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(x^3-4x^2+4x\right)'}{\left(x^3-12x+16\right)'}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{3x^2-12}=\frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(3x^2-8x+4\right)'}{\left(3x^2-12\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{6x-8}{6x}=\frac{6\cdot 2-8}{6\cdot 2}=\frac{1}{3}$$

Рассмотренный пример иллюстрирует тот факт, что правило Лопиталя допустимо применять несколько раз, если отношение производных также представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Задача 50 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}=\frac{-\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$.

Приведенные выше пределы могут быть вычислены не только по правилу Лопиталя, но и путем элементарных преобразований. Рассмотрим примеры, решение которых существенно упрощается с использованием правила Лопиталя.

Задача 51. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\frac{\left(e^{2x}\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}=\infty$.

Задача 52 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln(1+x))'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=0$.

Задача 53

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln\sin x)'}{(\ln\sin 5x)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{5\cos 5x}{\sin 5x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos x\cdot\sin 5x}{5\sin x\cdot\cos 5x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1\cdot 5x}{5\cdot x\cdot 1}=1$$

С помощью правила Лопиталя можно раскрывать неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$, предварительно записав ее как частное $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

Задача 54.

$$\lim_{x\to 0+0}\sqrt[3]{x}\cdot\ln x=0\cdot\infty=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}}=-3\lim_{x\to 0+0}\sqrt[3]{x}=0\,.$$

Задача 55.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}==\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

В некоторых примерах применение правила Лопиталя бессмысленно, так как предел отношения производных или не существует, или взятие производной не меняет принципиально функцию. В этих случаях предел можно попытаться вычислить с помощью элементарных преобразований:

Задача 56.

. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ -- предел отношения производных не существует, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует. Тем не менее, исходный предел существует и вычисляется, если в числителе и знаменателе дроби вынести за скобки множитель x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1\,.$$

При вычислении предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)$ используется теорема о том, что произведение бесконечно малой величины $\left(\frac{1}{x}\right)$ на ограниченную $(\sin x)$ есть величина бесконечно малая.

Правило Лопиталя используется также при раскрытии неопределенностей вида

1^{∞}, 0^0, ∞^0. При этом предварительно необходимо применить основное логарифмическое тождество: $x = e^{\ln x}$, а затем неопределенность $0 \cdot \infty$ привести к виду

$\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

<u>**Задача 57**</u>.

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = 0^0 = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\sin x \cdot \ln x} = 0 \cdot \infty = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}.$$

Тогда по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\right)} = e^{-1\cdot 1\cdot 0} = e^0 = 1$$

Рассмотрим пример, в котором возникает неопределенность 1^{∞}.

<u>**Задача 58**</u>.

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(e^x + x\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x}} = \frac{0}{0}$$

По правилу Лопиталя далее получим:

$$\lim_{x\to 0}\left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x + x\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+1}{1+0}} = e^2$$

И, наконец, рассмотрим пример, где встречается неопределенность ∞^0.

<u>**Задача 59**</u>.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = \infty^0 = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\ln x}{ctgx}}$$

. Далее по правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\ln x}{ctgx}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\right)} = e^{1\cdot 0} = 1.$$

Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора.

Сформулируем <u>теорему Тейлора:</u>

Функция $y(x)$, дифференцируемая $n+1$ раз в некотором интервале, содержащем точку a, может быть представлена в виде суммы многочлена n - ой степени и остаточного члена R_n:

$$y(x)=y(a)+\frac{y'(a)}{1!}\cdot(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2+\frac{y'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n+R_n$$

где $R_n=\frac{y^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$, где c -- некоторое число между a и x.

Эта формула позволяет приближенно представить (аппроксимировать) произвольную функцию $y(x)$ в виде многочлена и одновременно позволяет оценить погрешность R_n, которая во многих случаях может быть сделана как угодно малой.

Частный, простейший случай формулы Тейлора при $a=0$ называется формулой Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+R_n,$$ где

$$R_n=\frac{y^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}.$$

Запишем вид формулы Маклорена для функций $e^x, \sin x, \cos x$

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\ldots.+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots..+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

Отметим, что в формулах для $\sin x, \cos x$ значение x -- радианная мера угла.

Приведем примеры вычисления приближенного значения приведенных функций с помощью формулы Тейлора.

<u>Задача 60</u>. Вычислить $\cos 5^0$ с точностью 10^{-6}.

<u>Решение</u>. Выразим значение угла x в радианах:

$$x=\frac{\pi}{180}\cdot 5=\frac{\pi}{36}$$

$$\cos\frac{\pi}{36}\approx 1-\frac{\pi^2}{2!\cdot 36^2}+\frac{\pi^4}{4!36^4}-\frac{\pi^6}{6!36^6}+\ldots\ldots..+(-1)^m\frac{\pi^{2m}}{(2m)!36^{2m}}$$

Оценим, сколько слагаемых необходимо взять для достижения заданной точности.

Погрешность данной приближенной формулы равна

$R_{2m+2}=\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos\left[\theta x+(2m+2)\frac{\pi}{2}\right]$, где $0<\theta<1$. Избавимся от неизвестной θ, используя неравенство $|\cos\alpha|\le 1$, и для погрешности получим неравенство:

$$\left|R_{2m+2}\right| \le \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Чтобы определить, сколько слагаемых необходимо оставить, оценим значения остаточных членов:

$$\left|R_2\right| \le \frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2!\cdot 36^2} < 0{,}004$$

$$\left|R_4\right| \le \frac{x^4}{4!} = \frac{\pi^4}{4!\cdot 36^4} < 0{,}000003$$

$$\left|R_6\right| \le \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6!\cdot 36^6} < 0{,}00000003$$

Величина $\left|R_6\right| < 10^{-6}$, поэтому для достижения заданной точности достаточно взять три первых слагаемых, предшествующих R_6:

$$\cos 5^0 = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2!\cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{4!\cdot 36^4} \approx 1 - 0{,}0038077 + 0{,}0000024 \approx 0{,}96195$$

Ответ: $\cos 5^0 \approx 0{,}96195$.

<u>Задача 61</u>. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью 10^{-4}.

<u>Решение</u>. $\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$,

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{(-1)}{1!2} + \frac{(-1)^2}{2!2^2} + \frac{(-1)^3}{3!2^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!2^n}$$

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{1!\cdot 2} + \frac{1}{2!\cdot 2^2} - \frac{1}{3!\cdot 2^3} + \frac{1}{4!\cdot 2^4} - \frac{1}{5!\cdot 2^5} + \ldots$$

где $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $0 < \theta < 1$.

При $x = -\frac{1}{2}$ имеем $\left|R_n\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \le \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!}$, так как $e^{-\frac{1}{2}\theta} < 1$.

Проверим, сколько слагаемых необходимо рассмотреть для достижения заданной точности.

$$\left|R_4\right| \le \frac{x^4}{4!} = \frac{1}{4!\cdot 2^4} < 0{,}003$$

$$\left|R_5\right| \le \frac{x^5}{5!} = \frac{1}{5!\cdot 2^5} < 0{,}0003$$

$$\left|R_6\right| \le \frac{x^6}{6!} = \frac{1}{6!\cdot 2^6} < 0{,}00003$$

Величина $\left|R_6\right| < 10^{-4}$, поэтому для обеспечения требуемой точности возьмем первые пять членов разложения.

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}-\frac{1}{3!\cdot 2^3}+\frac{1}{4!\cdot 2^4}-\frac{1}{5!\cdot 2^5}=$$

$$=1-0{,}50000+0{,}12500-0{,}02083+0{,}00260-0{,}00026=0{,}60651$$

Ответ: $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}60651$.

Литература

Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика, том 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Изд. 5 стереотип. «Дрофа» М., 2003 г.

Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика том 2. Дифференциальное и интегральное исчисление. Изд. 5 стереотип. «Дрофа» М., 2003 г.

Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика том 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Изд. 5-е, стереотип. «Дрофа» М., 2003 г.

Б.П.Демидович. Сборник задач по математическому анализу. Изд-во «АСТ Астрель», М., 2003 г.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, тт. 1-2, М., Наука, 2000 г.

Катасонов А.М. Введение в математический анализ. Программированное учебное пособие. МГАПИ, 1999.г

Катасонов А.М. Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Программированное учебное пособие. МГАПИ, М., 1996.

Катасонов А.М. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков. Программированное учебное пособие. МГАПИ, 1997 г.