МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ (МИРЭА)

Иванов А.И., Иванов В.И.

КОНЕЧНЫЕ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва, 2015

УДК 51
ББК 22.1

Иванов А.И., Иванов В.И. Конечные неантагонистические игры. Учебное пособие. М.: МГУПИ (МИРЭА), 2015. Изд. 2-е, исп. и доп. – 48 с.

Учебное пособие является детализацией одного из разделов курса “Экономико-математические методы и модели”, таким образом, соответствует федеральной образовательной программе и отражает результаты современных научных разработок. Пособие посвящено математическому анализу принятия решений в конфликтной ситуации. Математические модели конфликтов строятся и изучаются в рамках теории неантагонистических игр. Рассматриваются различные случаи взаимоотношений игроков. Формулируются принципы рационального поведения игроков, которые находят весьма широкое применение в экономике, социологии, политологии и других областях человеческой деятельности.

Пособие адресовано студентам экономических специальностей, а также лицам, обладающим ограниченной математической подготовкой, желающим усвоить и применять на практике новые математические технологии.

Рецензенты:

Хаметов В.М., доктор физико-математических наук, профессор.

Кочкина Н.В., доктор экономических наук, профессор.

Учебное пособие рассмотрено, одобрено и рекомендовано к печати Учебно-методическим Советом МГУПИ.

УДК 51
ББК 22.1

ЧАСТЬ I. НЕКООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

§1.1. Конфликтные ситуации

В различных областях человеческой деятельности весьма часто возникают ситуации, в которых участвуют несколько сторон, придерживающихся различных интересов и обладающих возможностью выбора. Подобные ситуации называются конфликтными, или конфликтами.

Обратим внимание на то, что любая сторона, участвующая в конфликте, должна обладать более одной возможности действовать. В противном случае, если у неё имеется только одна такая возможность, она перестаёт играть роль стороны и превращается в обстоятельство, влияющее вполне однозначным способом на исход конфликта. В конфликте ни одна из сторон не определяет своими действиями исход конфликта.

При построении математической модели конфликта необходимо учесть существенные черты конфликта:

1) заинтересованные стороны;
2) возможные действия (более одного) каждой из сторон;
3) интересы сторон.

В теории игр строятся и изучаются математические модели конфликтов.

§1.2. Определение бескоалиционной игры в нормальной форме

Предположим, что в некоторой конфликтной ситуации сталкиваются интересы нескольких участников (сторон), каждый из которых имеет в своём распоряжении строго определённый набор возможных действий.

Заинтересованные стороны будут далее называться игроками, а множество всех игроков будет обозначаться J. Перенумеруем всех игроков: $J = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Стратегией игрока i, $i \in J$, называется совокупность правил, предписывающих ему однозначный выбор в том или ином случае.

Подчеркнём, что для полноты описания конфликта принято все возможные действия игрока, хорошие или плохие, считать его стратегиями.

Множество стратегий игрока i обозначим через X_i.

Бескоалиционная игра k лиц происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии x_i, именуемых далее чистыми стратегиями, из множеств X_i $i = 1, \ldots, k$. В результате чего складывается и реализуется упорядоченная совокупность стратегий $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $x_i \in X_i$, , называемая *ситуацией*. Множество всех ситуаций $\overline{x}$ обозначается $\overline{X}$.

Заинтересованность игроков в ситуациях проявляется в том, что каждому игроку i, $i \in J$, в любой ситуации $\bar{x}$, $\bar{x} \in \bar{X}$, приписывается число, выражающее степень удовлетворения его интересов в этой ситуации. Это число называется *функцией выигрыша*, или просто *выигрышем игрока i* в ситуации $\bar{x}$, и обозначается через $H_i\left(\bar{x}\right)$ (если $H_i\left(\bar{x}\right) < 0$, то игрок i проигрывает сумму, равную $\left|H_i\left(\bar{x}\right)\right|$).

Целью игрока i является получение по возможности большего выигрыша $H_i\left(\bar{x}\right)$, $i \in J$.

Вообще говоря, оценка игроком i, $i \in J$, ситуации $\bar{x}$ путём указания выигрыша $H_i\left(\bar{x}\right)$ может представлять собой трудную задачу и даже не всегда имеет смысл (если, например, она выражена в эмоциональных, эстетических или этических категориях).

В математических моделях, отображающих экономические явления, выигрыши почти всегда измеряются в стоимостном выражении: прибыль, себестоимость, валовая выручка, дивиденд и т.д.

Подчеркнём ещё раз, что никакой игрок не может полностью контролировать свой выигрыш, так как этот выигрыш не полностью зависит от его стратегии, а зависит и от стратегий, применяемых другими игроками.

Таким образом, математическая модель конфликта будет представлена в виде системы

$$\Gamma = \left\langle J, \quad \left\{X_i\right\}_{i \in J}, \ \left\{H_i\left(\bar{x}\right)\right\}_{\substack{i \in J \\ \bar{x} \in \bar{X}}} \right\rangle. \qquad (1)$$

Такая система называется *бескоалиционной игрой в нормальной форме*.

Бескоалиционная игра (1) называется *конечной*, если все множества стратегий $X_1, X_2, ..., X_k$ конечны, и *бесконечной*, если хотя бы одно из этих множеств бесконечно.

Бескоалиционная игра Г, в которой принимают участие два игрока, называется игрой двух лиц.

Бескоалиционная игра двух лиц называется *антагонистической*, если $H_1\left(\bar{x}\right) = -H_2\left(\bar{x}\right)$ для любых ситуаций $\bar{x}$, $\bar{x} \in \bar{X}$.

Бескоалиционные игры, не являющиеся антагонистическими, называются *неантагонистическими*.

Подчеркнём, что игра является неантагонистической, если число игроков больше двух или это игра двух лиц, но интересы игроков не являются прямо противоположными, т.е.

$$H_1\left(\bar{x}\right) \neq -H_2\left(\bar{x}\right).$$

Если бескоалиционная игра является одновременно конечной и неантагонистической, то она называется *конечной неантагонистической*.
В антагонистических играх игроки не могут достигнуть обоюдной выгоды посредством какого-либо сотрудничества. В неантагонистических играх такой

обоюдный выигрыш возможен. В части 1 рассматриваются *некооперативные* игры, когда не разрешено никакое сообщение между игроками до игры. Отметим, однако, что иногда в этой части будут указываться изменения, к которым могут привести сообщения до начала игры.

§1.3. Определение биматричной игры

Конечная бескоалиционная игра двух лиц называется *биматричной*.

В биматричной игре

$$\Gamma = \left\langle \{1,2\}\, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \{H_1(x_1,x_2), H_2(x_1,x_2)\}_{\substack{x_1\in \mathcal{X}_1\\ x_2\in \mathcal{X}_2}} \right\rangle$$

множества стратегий игроков 1 и 2 являются конечными множествами

$$\mathcal{X}_1 = \left\{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, ..., x_1^{(n)}\right\}; \quad \mathcal{X}_2 = \left\{x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, ..., x_2^{(m)}\right\}.$$

Элементы $x_1^{(i)},\ x_1^{(i)} \in \mathcal{X}_1,\ i=1, ..., n,$ являются чистыми стратегиями игрока 1. Элементы $x_2^{(j)},\ x_2^{(j)} \in \mathcal{X}_2,\ j=1, ..., m,$ – чистые стратегии игрока 2.

Пусть $x_1^{(i)} \in \mathcal{X}_1,\ x_2^{(j)} \in \mathcal{X}_2,$ тогда упорядоченный набор $\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right)$ будем называть ситуацией в чистых стратегиях.

Чистые стратегии $x_1^{(i)}$ игрока 1 занумерованы от 1 до n и могут обозначаться числами $i = 1, \ldots, n$. Аналогично, чистые стратегии $x_2^{(j)}$ игрока 2 занумерованы от 1 до m и могут обозначаться числами $j = 1, \ldots, m$. (В дальнейшем мы будем пользоваться тем способом обозначения чистых стратегий, который удобнее в конкретных случаях).

Поэтому ситуацию $\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right)$ мы можем обозначить также $(i,\ j)$.

Матрицы

$$H_1 = A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & ... & a_{1m} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & ... & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad H_2 = B = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & ... & ... & b_{1m} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{i1} & ... & b_{ij} & ... & b_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & ... & ... & b_{nm} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{ij} = H_1\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right) = H_1(i,\ j),$$

$$b_{ij} = H_2\left(x_1^{(i)},\ x_2^{(j)}\right) = H_2(i,\ j), \quad i=1, ..., n;\ j=1, ..., m,$$

называются *платёжными матрицами* биматричной игры Г. Элементы a_{ij} и b_{ij} матриц А и В являются соответственно выигрышами игроков 1 и 2 в ситуации $(i,\ j)$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$.

Платёжные матрицы А и В полностью определяют биматричную игру Г.

Биматричная игра Г в соответствии с изложенным происходит следующим образом. Первый игрок выбирает номер i–ой строки, а второй (одновременно и независимо) – номер j-ого столбца.

После этого первый игрок получает выигрыш, равный a_{ij}, а второй – выигрыш, равный b_{ij}.

Заметим, что биматричную игру с матрицами A и B можно также задать $(n \times m)$-матрицей (A, B), каждый элемент которой есть упорядоченная пара $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$, $i=1, ..., n;\ j=1, ..., m.$

Игру, определяемую матрицами A и B, будем обозначать Г(A, B).

Если матрицы A и B размера $(n \times m)$, то мы имеем биматричную $(n \times m)$ - игру Г(A, B).

Если в биматричной игре $a_{ij} = -b_{ij},\quad i=1, ..., n;\ j=1, ..., m,$ то игра является антагонистической. В антагонистической игре то, что выигрывает один игрок, обязательно проигрывает другой игрок. Если биматричная игра Г(A, B) является антагонистической, то B = –A.

Чтобы задать антагонистическую биматричную игру, достаточно указать только одну матрицу – платёжную матрицу первого игрока. Антагонистическая биматричная игра называется *матричной* игрой.

§1.4. Примеры биматричных игр

Пример 1. Планирование выпуска побочной продукции.

Предположим, что в некотором городе имеются два предприятия, которые помимо своих основных изделий могут выпускать некоторую побочную продукцию. Первое предприятие может выпускать продукцию типов K_1, K_2, …, K_n с ценами соответственно p_1, p_2, …, p_n. Второе предприятие может выпускать продукцию типов M_1, M_2, …, M_m с ценами соответственно q_1, q_2, …, q_m.

Если первое предприятие будет выпускать продукцию типа K_i, а второе предприятие – продукцию M_j, то сбыт найдут c_{ij} единиц товара K_i и d_{ij} единиц товара типа M_j, $i=1, ..., n;\ j=1, ..., m.$

Считая, что предприятия действуют независимо друг от друга, можно рассмотреть биматричную игру Г(A, B), где

$$A = \begin{pmatrix} p_1c_{11} & ... & p_1c_{1j} & ... & p_1c_{1m} \\ .... & ... & ... & ... & ... \\ p_ic_{i1} & ... & p_ic_{ij} & ... & p_ic_{im} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ p_nc_{n1} & ... & p_nc_{nj} & ... & p_nc_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} q_1d_{11} & ... & q_1d_{nj} & ... & q_1d_{1m} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ q_id_{i1} & ... & q_id_{ij} & ... & q_1d_{im} \\ .... & ... & ... & ... & ... \\ q_nc_{n1} & ... & q_nc_{nj} & ... & q_nc_{nm} \end{pmatrix}.$$

Пример 2. «Семейный спор».

Два партнёра договариваются о совместном проведении одного из двух действий: действие $\alpha_1 = \beta_1$ и действие $\alpha_2 = \beta_2$, каждое из которых требует их совместного участия.

В случае осуществления первого из двух действий выигрыш первого партнёра (игрока 1) будет в четыре раза превышать выигрыш второго партнёра (игрока 2). Напротив, в случае осуществления второго из этих двух действий выигрыш игрока 1 будет в четыре раза меньше выигрыша игрока 2. Если же партнёры выполнят различные действия, то выигрыш каждого из них будет равен нулю.

Эта конфликтная ситуация приводит к биматричной игре, в которой каждый из игроков имеет по две стратегии.

Выигрыши игроков 1 и 2 соответственно описываются матрицами A и B:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Понятно, что различные конфликтные ситуации могут иметь одну и ту же математическую модель. Наиболее известна следующая интерпретация этой игры.

Муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч $(\alpha_1,\ \beta_1)$ или театр $(\alpha_2,\ \beta_2)$. Если они имеют разные желания $(\alpha_1,\ \beta_2)$ или $(\alpha_2,\ \beta_1)$, то они остаются дома, день оказывается испорченным. Муж предпочитает футбол, а жена – театр.

Отсюда и название, вынесенное в заголовок.

Пример 3. «Дилемма заключённого».

Игроками являются два заключённых, находящихся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения в большой степени зависит от того, заговорят они или будут молчать.

Если оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения (потери каждого из заключённых составят (−1 год)). Если сознаются, то получат срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство (потери каждого из заключённых составят в этом случае (−9 лет)). Если же заговорит только один из заключённых, а другой будет молчать, то в этом случае заговоривший будет выпущен на свободу (его потери равны 0), а сохраняющий молчание получит максимально возможное наказание (−10 лет).

Эта конфликтная ситуация приводит к биматричной (2×2)-игре, в которой каждый из игроков имеет по две стратегии: $\alpha_1 = \beta_1$ – непризнание,

$\alpha_2 = \beta_2$ – признание.

Платёжные матрицы игроков имеют вид

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & -9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

ТЕМА 2. ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

§2.1. Ситуация равновесия по Нэшу

Пусть дана бескоалиционная игра Г в нормальной форме к лиц

$$\varGamma = \left\langle J, \ \{X_i\}_{i\in J}, \ \{H_i(\overline{x})\}_{\substack{i\in J \\ \overline{x}\in \overline{X}}} \right\rangle .$$

В игре Г каждый из игроков стремится к достижению ситуации $\overline{x} \in \overline{X}$, в которой значение его функции выигрыша было бы наибольшим. Однако функция выигрыша $H_i(\overline{x})$ зависит не только от чистой стратегии *i*-го игрока, но и от чистых стратегий, выбираемых другими игроками, поэтому ситуации, дающие большее значение выигрыша для *i*-го игрока, могут не быть таковыми для других игроков. Таким образом, стремление игроков получить наибольший выигрыш носит конфликтный характер.

Пусть $\overline{x} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_k)$ – произвольная ситуация в чистых стратегиях в игре Г, а x_i – некоторая чистая стратегия игрока *i* заменена на чистую стратегию x_i'. В результате мы получаем ситуацию $\overline{x} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, ..., x_k)$ которую будем обозначать через $(\overline{x} \| x_i')$. Очевидно, что если $x_i = x_i'$, то $(\overline{x} \| x_i') = \overline{x}$.

Определение 1. Ситуация $\overline{x}^* = (x_1^*, ..., x_i^*, ..., x_k^*)$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу*, если для всех $x_i \in X_i$ и $i = 1, \ldots, k$ имеет место неравенство

$$H_i\left(\overline{x}^*\right) \ge H_i\left(\overline{x}^* \| x_i\right). \qquad (1)$$

Отступление. Нэш Дж. (Nash J.F.) (род. в 1928 г.). Лауреат Нобелевской премии в области экономики 1994 г. за работы по анализу некооперативных игр (совместно с Р. Зельтен (Германия) и Дж. Харшаньи (США)). Явился прототипом главного героя фильма «Игры разума».

Из определения ситуации равновесия по Нэшу следует, что ни один из игроков *i* не заинтересован в отклонении от стратегии x_i^*, входящей в эту ситуацию (согласно (1) его выигрыш при использовании стратегии x_i вместо x_i^*, разве лишь уменьшится при условии, что остальные игроки придерживаются стратегий, образующих ситуацию равновесия $\overline{x}^*$).

Определение 2. Чистая стратегия $x_i^* \in X_i, i = 1, \ldots, k$ называется *равновесной*, если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу.

Для биматричной ($n \times m$)-игры Г(A, B) пара (i^*, j^*) будет ситуацией равновесия по Нэшу, если неравенства

$$a_{ij^*} \le a_{i^* j^*},\quad b_{ij^*} \le b_{i^* j^*}$$

выполняются для всех $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Для игры «семейный спор», рассматриваемой в § 1.4 темы 1, равновесными являются ситуации (α_1, β_1) и (α_2, β_2).

Для игры «дилемма заключённого», описанной в § 1.4 темы 1, равновесной будет ситуация (α_2, β_2).

Для матричной (n × m)-игры с матрицей $H_1 = (a_{ij})$, являющейся матрицей выигрыша игрока 1, ситуация (i^*, j^*) равновесия по Нэшу будет *седловой точкой (ситуацией равновесия) в чистых стратегиях*. В самом деле, для ситуации (i^*, j^*) равновесия по Нэшу справедливы неравенства

$$a_{ij^*} \le a_{i^* j^*},\quad b_{ij^*} \le b_{i^* j^*}, \tag{2}$$

$$a_{ij} = H_1\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right) = H_1(i, j),$$

$$b_{ij} = H_2\left(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}\right) = H_2(i, j),\quad i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m.$$

Так как игра является антагонистической, то

$$a_{ij} = -b_{ij}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Из соотношений (2)и (3) получаем двойные неравенства

$$a_{ij^*} \le a_{i^* j^*} \le a_{i^* j},\quad i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m. \tag{4}$$

Соотношения (4) означают, что ситуация (i, j) является седловой точкой в чистых стратегиях.

Полезно кратко изложить свойства матричных игр с седловыми точками в чистых стратегиях.

Свойства матричных игр

I. Так как в матричной игре интересы игроков являются антагонистическими, то игрокам невыгодно информировать друг друга о стратегиях, которые они собираются применять. (Конечно, если игрок собирается использовать оптимальную стратегию, то его выигрыш не уменьшится от того, что он объявит об этом, но он ничего и не выигрывает).

II. Если (i^0, j^0) (i^*, j^*) – две седловые точки в чистых стратегиях, а v – *значение игры*, то

$$v = H\left(x^0, y^0\right) = H\left(x^*, y^*\right), \tag{5}$$

(свойство равноценности седловых точек).

III. Если (i^0, j^0) (i^*, j^*) – две седловые точки в чистых стратегиях, то (i^0, j^*)

и $\left(i^*,\ j^0\right)$ – также седловые точки в чистых стратегиях (свойство взаимозаменяемости стратегий, входящих в седловые точки).
IV. Игроки не заинтересованы в общении перед началом игры для выработки совместных действий.

V. Пусть дана ($n \times m$)-матричная игра Г с матрицей выигрыша $H = \left(a_{ij}\right)$. Тогда $\underline{v} = \max\limits_{1\le i\le n} \min\limits_{1\le j\le m} a_{ij} = \min\limits_{1\le j\le m} a_{i_0 j}$, $\quad \overline{v} = \min\limits_{1\le j\le m} \max\limits_{1\le i\le n} a_{ij} = \max\limits_{1\le i\le n} a_{ij_0}$ – соответственно *нижнее и верхнее значения игры*, i_0 – *максиминная стратегия игрока* 1, j_0 – *минимаксная стратегия игрока* 2. Напомним, что всегда $\underline{v} \le \overline{v}$.

Если в игре Г существует седловая точка в чистых стратегиях, а i_0 – максиминная и j_0 – минимаксная стратегии игроков 1 и 2 соответственно, то $\left(i_0,\ j_0\right)$ – седловая точка в чистых стратегиях, и наоборот.

Выясним, выполняются ли эти свойства для биматричных игр.

Пример. Вернёмся к игре «семейный спор» (см. пример 2 в § 1.4 темы 1). Как уже отмечалось, в ней есть две ситуации равновесия по Нэшу $\left(\alpha_1,\ \beta_1\right)$ и $\left(\alpha_2,\ \beta_2\right)$. Ситуации равновесия по Нэшу не являются равноценными.

Первая ситуация выгодна игроку 1, в вторая – игроку 2. Это противоречит (5), так как выигрыши игроков в этих ситуациях различны.

Стратегии, входящие в различные ситуации равновесия по Нэшу, не являются взаимозаменяемыми.

Далее отметим, что несмотря на равновесность по Нэшу ситуаций $\left(\alpha_1,\ \beta_1\right)$ и $\left(\alpha_2,\ \beta_2\right)$ пары $\left(\alpha_1,\ \beta_2\right)$ и $\left(\alpha_2,\ \beta_1\right)$ не являются таковыми, т.е. не выполнено свойство III.

Влияние раскрытия стратегии

Игрок 1 предпочёл бы ситуацию $\left(\alpha_1,\ \beta_1\right)$, а игрок 2 – $\left(\alpha_2,\ \beta_2\right)$. Если игрок 1 информирует соперника о намерении выбрать стратегию α_1 и что никакой довод не заставит его изменить свой выбор, и если игрок 2 убеждён в том, что игрок 1 будет упорствовать, то ему ничего не остаётся как объявить стратегию β_1.

Аналогичное рассуждение имеет место, если игрок 2 первым объявит о своём намерении.

Таким образом, каждому из игроков выгодно первому объявить свою стратегию, что противоречит свойству I матричных игр.

Игрокам может быть выгодно общаться до начала игры

Предположим, что игроки не общаются до начала игры, а делают выбор одновременно и независимо друг от друга, т.е. они играют в некооперативную игру.

Игрок 1 может рассуждать следующим образом: «Я хочу $\left(\alpha_1,\ \beta_1\right)$, мой противник, очевидно, хочет $(\alpha_2,\ \beta_2)$, но если я выберу α_1, а он β_2, то мы оба проиграем. Положим теперь, что я уступаю и выберу α_2, тогда я всё же окажусь в довольно хорошем положении (получу выигрыш, равный 1). Но игрок 2 может рассуждать таким же образом и уступить мне, выбрать β_1, и опять мы проиграем (при паре $(\alpha_2,\ \beta_1)$ – вектор выигрышей (0 ,0)). Следовательно, какие бы доводы я ни привёл в пользу α_1 или α_2, вследствие симметрии игры аналогичные доводы имеются у игрока 2, и, по-видимому, мы оба не можем сделать разумный выбор. Поэтому нам выгодно общаться перед началом игры и договариваться о совместном плане действий». Но эти рассуждения противоречат свойству IV.

Максиминные чистые стратегии игроков могут не образовывать ситуацию равновесия по Нэшу

Найдём максиминные стратегии игроков, которые дают им гарантированные выигрыши.

В худшем случае игрок 1 получит при выборе им чистых стратегий α_1 или α_2, следующие выигрыши:

$$A = \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \to \min(4;0)=0, \\ \to \min(0;1)=0, \end{array} \quad \max(0;0)=0.$$

Гарантированным выигрышем игрока 1 является выигрыш, равный 0.

Аналогично, игрок 2, если он выберет свои чистые стратегии β_1 или β_2, в худшем случае получит:

$$B = \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\min(1,0)=0, \quad \min(0,4)=0,$$
$$\max(0,0)=0.$$

Гарантированным выигрышем игрока 2 будет выигрыш, равный 0. Любая чистая стратегия каждого игрока является его максиминной чистой стратегией. Но, по-видимому, для игрока 1 предпочтительной является стратегия α_1, а для игрока 2 – стратегия α_2. Но пара $(\alpha_1,\ \beta_2)$ не образует ситуацию, равносильную по Нэшу, т.е. свойство V не выполняется для биматричных игр.

Таким образом, мы имеет пример биматричной игры, для которой не выполнено ни одно из свойств I-V матричной игры.

§2.2. Сильно равновесная ситуация

Пусть дана бескоалиционная игра Г в нормальной форме k лиц, т.е. система

$$\Gamma = \left\langle J,\ \ \{X_i\}_{i\in J},\ \left\{H_i\left(\overline{x}\right)\right\}_{\substack{i\in J \\ \overline{x}\in\overline{X}}} \right\rangle,$$

$J = \{1, \ldots, k\}$.

Характерной чертой ситуации равновесия по Нэшу является то, что отклонение от неё двух игроков и более может привести к увеличению выигрыша хотя бы одного из отклонившихся игроков.

Пусть $S \subseteq J$ – некоторое подмножество множества игроков («коалиция») и пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ – ситуация в игре Г. Обозначим через $\left(\overline{x} \| x_S'\right)$ ситуацию, которая получается из ситуации $\overline{x}$ при замене в ней стратегий x_i, $i \in S$, на стратегии x_i', $x_i' \in X_i$, $i \in S$. Другими словами, в ситуации $\left(\overline{x} \| x_S'\right)$ игроки, входящие в коалицию S, заменяют свои стратегии x_i на стратегии x_i'.

Введём следующее определение.

<u>Определение</u>. Ситуация $\overline{x}^*$ называется *сильно равновесной*, если для любых «коалиций» $S \subseteq J$ и любых $\left(\overline{x}^* \| x_S\right) \in \overline{X}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i\in S} H_i\left(\overline{x}^*\right) \geq \sum_{i\in S} H_i\left(x^* \| x_s\right). \qquad (3)$$

Условие (3) гарантирует нецелесообразность соглашения между игроками с целью вступления в некоторую «коалицию» S, так как в любой «коалиции» находится игрок i, которого это соглашение не устраивает.

Любая сильно равновесная ситуация является равновесной по Нэшу.

<u>Пример 1</u>. В игре «семейный спор» обе равносильные по Нэшу ситуации (α_1, β_1), (α_2, β_2) являются сильно равновесными.

Если бы сильное равновесие существовало в достаточно широком классе игр, то оно могло бы явиться приемлемым принципом оптимальности в бескоалиционной игре. Однако оно существует крайне редко.

<u>Пример 2</u>. Рассмотрим биматричную игру «дилемма заключённого» (см. пример 3 из § 1.4 темы 1).

В этой игре есть одна ситуация, равновесная по Нэшу (α_2, β_2) (но не сильно равновесная), которая даёт игрокам вектор выигрышей (–9, –9). Если оба игрока выйдут из (α_2, β_2) и сыграют (α_1, β_1), то они получат вектор выигрыш (–1, –1), что выгодно обоим. Эта ситуация не является равновесной, но она лучшая для обоих игроков. Таких парадоксов в матричных играх не бывает.

§2.3. Оптимальность по Парето

Последний пример приводит к мысли о возможности других принципов оптимальности в бескоалиционной игре, приводящих к ситуациям, более выгодным участникам, чем в случае равновесных по Нэшу ситуациях. Таким принципом является оптимальность по Парето.

Отступление. Парето В. (Pareto B.) (1848-1923) – итальянский экономист и социолог. Являлся представителем лозаннской школы Л.Вальраса.

Определение. Ситуация $\overline{x}_*$ в бескоалиционной игре $\Gamma = \left\langle J, \{X_i\}_{i\in J}, \{H_i(\overline{x})\}_{\substack{i\in J\\ \overline{x}\in\overline{X}}} \right\rangle$ называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $\overline{x}\in\overline{X}$, для которой имеют место неравенства

$$H_i(\overline{x}) \ge H_i(\overline{x}_*) \text{ для всех } i\in J \text{ и}$$

$$H_{i_0}(\overline{x}) > H_{i_0}(\overline{x}_*) \text{ хотя бы для одного } i_0\in J.$$

Иными словами, оптимальность по Парето ситуации $\overline{x}_*$ означает, что не существует другой ситуации $\overline{x}$, которая была бы предпочтительнее ситуации $\overline{x}_*$ для всех игроков.

Следует отметить различие понятий ситуации равновесия по Нэшу и ситуации, оптимальной по Парето. В ситуации равновесия по Нэшу ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша. В ситуации, оптимальной по Парето, все игроки, действуя совместно, не могут увеличить выигрыш каждого.

В то же время в оптимальной по Парето ситуации игрок, отклонившийся от неё, иногда получает больший выигрыш.

Сильно равновесная ситуация безусловно является и оптимальной по Парето.

В игре «дилемма заключённого» ситуация $(\alpha_2,\ \beta_2)$ равновесна по Нэшу, но не оптимальна по Парето. Напротив, ситуация $(\alpha_1,\ \beta_1)$ является оптимальной по Парето, но не является равновесной по Нэшу.

В игре «семейный спор» обе равновесные по Нэшу ситуации $(\alpha_1,\ \beta_1), (\alpha_2,\ \beta_2)$ сильно равновесны и оптимальны по Парето, но не являются взаимозаменяемыми.

§2.4. Задачи к теме

1. Найти множества всех ситуаций равновесия по Нешу (в чистых стратегиях) в следующих $(n\times m)$-биматричных играх с платёжными матрицами A и B:
   a) Матрицы A и B – диагональные и положительные, т.е. $n = m$,
   $a_{ij} = b_{ij} = 0,\ i\neq j$ и $a_{ii} > 0,\ b_{ii} > 0,\ \ i = 1,...,n;\ \ j = 1,...,m.$

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 7 & 9\end{pmatrix}$,

в) $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 4 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

1. Показать, что в биматричной игре с матрицами

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

ситуация (2,1) является равновесной по Нешу. Является ли она сильно равновесной?

2. В биматричной игре с матрицами

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 5\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 6\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$$

найти все ситуации, оптимальные по Парето в чистых стратегиях. Есть ли в этой игре ситуации, равновесные по Нэшу в чистых стратегиях?

ТЕМА 3. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

§ 3.1. Смешанное расширение конечной бескоалиционной игры *k* лиц

Дана конечная бескоалиционная игра *k* лиц в нормальной форме

$$\Gamma = \left\langle \{J\},\ \ \{X_i\}_{i\in J},\ \{H_i(\overline{x})\}_{\substack{i\in J\\ \overline{x}\in\overline{X}}} \right\rangle.$$

Здесь множество $J = \{1,...k\}$, X_i – множество чистых стратегий игрока всех *i*, $i \in J$, $H_i(\overline{x})$ – выигрыш игрока *i*, $i \in J$, в ситуации $\overline{x} = (x_1,...,x_i,...,x_k)$, $x_i \in X_i$, $\overline{X}$ – множество всех ситуаций $\overline{x}$ в чистых стратегиях.

Даже для матричных игр существование седловой точки (ситуации равновесия) в чистых стратегиях является редким фактом.

В матричных играх эта трудность преодолевается введением смешанных стратегий. Основной теоремой теории матричных игр является теорема о существовании седловой точки в смешанных стратегиях, принадлежащая Дж. фон Нейману.

Отступление. Нейман Дж. фон (Neumann J. von) (1903-1957). Выдающийся американский математик. Участие в работах по созданию первой атомной бомбы. Внёс большой вклад в создание первых ЭВМ. Основополагающие труды по квантовой механике, теории игр, математической логике.

Итак, рассмотрим смешанное расширение бескоалиционной игры Г.

Предположим, что игроки выбирают свои чистые стратегии случайно.

Определение 1. Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией*.

Так как смешанная стратегия характеризуется своим распределением, то будем отождествлять в дальнейшем смешанную стратегию с вероятностным распределением на множестве чистых стратегий. Таким образом, смешанная стратегия X_i игрока *i* в игре есть вектор, размерность которого равна числу чистых стратегий игрока

$$X_i = \left(\xi_1^{(i)},...,\xi_{l_i}^{(i)}\right),\ \ \sum_{s=1}^{l_i}\xi_s^{(i)} = 1;\quad \xi_s^{(i)} \ge 0,$$

где l_i – число элементов (чистых стратегий) в множестве X_i, $i = 1, …, k$.

Здесь $\xi_s^{(i)}$ – вероятность, с которой игрок i применяет свою s-ую чистую стратегию.

Множество всех смешанных стратегий игрока *i* будем обозначать $\overline{X}_i$.

Любую чистую стратегию x_i *i*-ого игрока можно отождествить со смешанной стратегией X_i этого игрока, в которой вероятность применения чистой стратегии x_i равна единице, а вероятность применения всех остальных чистых стратегий равна нулю.

Определение 2. Любой набор вида

$$\sigma = (X_1, ..., X_i, ..., X_k), \text{ где}$$

X_i – некоторая смешанная стратегия игрока *i*, $i = 1, ..., k$, называется *ситуацией в смешанных стратегиях*.

Если задана некоторая ситуация $\sigma = (X_1, ..., X_i, ..., X_k)$ в смешанных стратегиях, то тем самым указаны вероятности, с которыми тот или иной игрок выбирает свои чистые стратегии. В этом случае можно определить вероятность $p_\sigma(\bar{x})$ появления любой ситуации $\bar{x} = (x_1, ..., x_i, ..., x_k)$ в чистых стратегиях (для этого нужно перемножить вероятности применений игроками чистых стратегий $x_1, ..., x_i, ..., x_k$).

Обозначим через $\overline{H}_i(\sigma)$, i = 1, …, k, математическое ожидание выигрыша (средний выигрыш) игрока *i* в ситуации $\sigma = (X_1, ..., X_i, ..., X_k)$.

Тогда

$$\overline{H}_i = \overline{H}_i(\sigma) = \sum_{\bar{x} \in \bar{X}} H_i(\bar{x}) p_\sigma(\bar{x}). \quad (1)$$

Определение 3. Система

$$\overline{\Gamma} = \left\langle J, \ \{\overline{X}_i\}_{i \in J}, \ \{\overline{H}_i\}_{i \in J} \right\rangle,$$

в которой $J = \{1, ..., k\}$ – множество игроков, $\overline{X}_i$ – множество смешанных стратегий каждого игрока *i*, $\overline{H}_i$ – функция выигрыша каждого игрока *i*, определяемая (1), называется *смешанным расширением бескоалиционной игры k лиц.*

§3.2. Смешанное расширение биматричной игры

Пусть дана биматричная ($n \times m$) – игра Г(А, В) с платёжными матрицами

$$A = (a_{ij}), \quad B = (\beta_{ij}).$$

Рассмотрим смешанное расширение этой игры.

Замечание.

Чтобы сократить употребление индексов смешанные стратегии игроков 1 и 2 будем обозначать через *X* и *Y* соответственно, множества смешанных стратегий игроков 1 и 2 через $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ соответственно.

Любая смешанная стратегия игрока 1 имеет вид

$$X = (p_1, ..., p_i, ..., p_n),$$

где p_i – вероятность, с которой игрок 1 применяет *i*–ю чистую стратегию.

Любая смешанная стратегия игрока 2 имеет вид

$$Y = (q_1, ..., q_j, ..., q_m),$$

где q_j – вероятность, с которой игрок 2 применяет j–ю чистую стратегию.

Выбор игроком одной из своих чистых стратегий с вероятностью 1, а каждый из остальных – с вероятностью 0, очевидно, означает выбор им же выделенной чистой стратегии. Поэтому каждая из первоначальных чистых стратегий игрока также является его смешанной стратегией.

Если $\overline{H_1}(\sigma)$, $\overline{H_2}(\sigma)$ – математические ожидания выигрышей соответственно игроков 1 и 2 в ситуации $\sigma = (X, Y)$, где $X = \left(p_1, ..., p_i, ..., p_n\right)$, $Y = \left(q_1, ..., q_j, ..., q_m\right)$, то

$$\overline{H_1}(\sigma) = X \bullet A \bullet Y^T = \left(p_1,\ p_2, ..., p_n\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} & ... & a_{1j} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & ... & a_{jm} & ... & a_{ij} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ ... \\ q_j \\ ... \\ q_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j,$$

$$\overline{H_2}(\sigma) = X \bullet B \bullet Y^T = (p_1 ... p_i ... p_n) \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1j} & ... & b_{1m} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{j1} & ... & b_{ij} & ... & b_{jm} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nj} & ... & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ ... \\ q_j \\ ... \\ q_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} p_i q_j.$$

Следовательно, построено смешанное расширение $\overline{\Gamma}$ биматричной игры Г(А, В), т.е. бескоалиционная игра двух лиц

$$\overline{\Gamma} = \left\langle \overline{X}, \overline{Y}, \overline{H_1}, \overline{H_2} \right\rangle.$$

Определение . Множество тех номеров i (чистых стратегий игрока 1), для которых в смешанной стратегии $X = \left(p_1, ..., p_i, ..., p_n\right)$, компоненты p_i положительны, называется *спектром смешанной стратегии* X и обозначается supp X .

Аналогично, спектром смешанной стратегии $Y = \left(p_1, ..., p_i, ..., p_n\right)$, игрока 2 называется множество supp Y тех его чистых стратегий j, для которых $q_j > 0$.

Введение смешанных стратегий не снимает те трудности, которые возникают при анализе биматричной игры (см. пример в § 2.1 темы 2).

Пример. Пусть в игре «семейный спор» игрок 1 хочет максимально увеличить свой гарантированный выигрыш. Это означает, что он намерен выбрать смешанную стратегию $X = \left(p, 1-p\right)$ так, чтобы максимально увеличить наименьшую из двух величин $\overline{H}_1(X, \beta_1)$ и $\overline{H}_1(X, \beta_2)$, т.е.

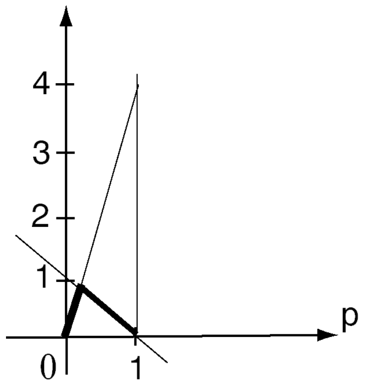
$$\underline{v} = \max_X \min\left\{\overline{H}_1(X, \beta_1), \overline{H}_1(X, \beta_2)\right\}$$

Напомним, что $\beta_1 = (1,0)$ и $\beta_2\ (0, 1)$ – это первая и вторая чистые стратегии игрока 2.

$$\overline{H}_1(X, \beta_1) = X \bullet A \bullet \beta_1^T = (p,1-p)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p,1-p) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4p,$$

$$\overline{H}_1(X, \beta_2) = X \bullet A \bullet \beta_2^T = (p,1-p)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (p,1-p) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-p,$$

$$\min\{4p;\ 1-p\} = J(p)$$



Вид графика функции $\varphi(p)$ выделен жирной линией. Найдём $\max\limits_p \min\{4p;\ 1-p\} = \max\limits_p \varphi(p).$ Для этого приравняем $4p = 1 - p$:

Отсюда $p_0 = \frac{1}{5}$; $\underline{v} = \varphi\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$.

Максиминная стратегия X^0 игрока 1 имеет вид $X^0 = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$ и даёт ему средний гарантированный выигрыш $\underline{v} = \frac{4}{5}$.

Подсчитаем средние выигрыши игрока 2 в ситуациях $\left(X^0, \beta_1\right)$ и $\left(X^0, \beta_2\right)$.

$$\overline{H}_2\left(X^0, \beta_1\right) = X^0 \bullet B \bullet \beta_1^T = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5};$$

$$\overline{H}_2\left(X^0, \beta_2\right) = X^0 \bullet B \bullet \beta_2^T = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{16}{5}.$$

Таким образом, если игрок 2 догадается, что его партнёр придерживается стратегии X^0, то он выберет β_2 и получит выигрыш $\frac{16}{5}$.

Аналогично, пусть игрок 2 придерживается своей максиминной стратегии, т.е. выбирает смешанную стратегию $Y = (q, 1-q)$ так, чтобы максимально увеличить наименьшую из двух величин

$$\overline{H}_2(\alpha_1, Y) \text{ и } \overline{H}_2(\alpha_2, Y).$$

Здесь $\alpha_1 = (1;\ 0)$, $\alpha_2 = (0;\ 1)$ – чистые стратегии игрока 1. Проведя аналогичные вычисления, мы получим, что максиминная стратегия игрока 2 имеет вид $Y^0 = \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5} \right)$, причём выигрыши игроков 1 и 2 в ситуации $\left(\alpha_1, Y^0 \right)$ соответственно равны $\frac{16}{5}$ и $\frac{4}{5}$, а в ситуации $\left(\alpha_2, Y^0 \right)$ соответственно $\frac{1}{5}$ и $\frac{4}{5}$. Поэтому игроку 1 против максиминной стратегии Y^0 игрока 2 следует применить свою чистую стратегию α_1.

После таких рассуждений игроков они оказываются в ситуации $\left(\alpha_1 , \beta_2 \right)$, в которой вектор выигрышей (0; 0).

Суть затруднений в том, что ситуация $\left(X^0, Y^0 \right)$ не является равновесной.

§3.3. Ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях

Дана конечная бескоалиционная игра в нормальной форме *k* лиц

$$\Gamma = \left\langle J, \quad \{\mathcal{X}_i\}_{i \in J}, \ \left\{ H_i\left(\overline{x}\right) \right\}_{\substack{i \in J \\ \overline{x} \in \overline{\mathcal{X}}}} \right\rangle.$$

Здесь $J = \{1, 2, \ldots, k\}$, $\mathcal{X}_i$ – множество чистых стратегий игрока *i*, $i \in J$; $H_i\left(\overline{x}\right)$ – выигрыш игрока *i*, $i \in J$, в ситуации $\overline{x} = \left(x_1 , \ldots, x_i , \ldots, x_k \right)$, $x_i \in \mathcal{X}_i, \overline{\mathcal{X}}$ – множество всех ситуаций в чистых стратегиях.

Если $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k$ – некоторый набор смешанных стратегий, а $\overline{H_i}(\sigma)$ – математическое ожидание выигрыша *i*-го игрока в ситуации $\sigma = \left(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \right)$, то

$$\overline{H_i}(\sigma) = \sum_{\overline{x} \in \overline{\mathcal{X}}} H_i\left(\overline{x}\right) p_\sigma\left(\overline{x}\right),$$

где $p_\sigma(\overline{x})$ – вероятность появления ситуации $\overline{x} = \left(x_1 , \ldots, x_i , \ldots, x_k \right)$ в чистых стратегиях при условии, что игроки придерживаются своих смешанных стратегий $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k$.

Пусть $\sigma = \left(X_1 , \ldots, X_{i-1}, X_i , X_{i+1}, \ldots, X_k \right)$ – произвольная ситуация в смешанных стратегиях, а X_i – некоторая смешанная стратегия игрока *i*, $X_i \in \overline{X}_i$. Построим ситуацию, которая отлична от σ только тем, что смешанная стратегия X_i игрока *i* заменена на смешанную стратегию X_i'. В результате мы получаем ситуацию $\left(X_1 , \ldots, X_{i-1}, X_i', X_{i+1}, \ldots, X_k \right)$, которую будем обозначать $\left(\sigma \| X_i^{'}\right)$.

Определение 1.

Ситуация $\sigma^0 = (X_1^0, ..., X_i^0, ..., X_k^0)$ в смешанных стратегиях называется *приемлемой* для игрока *i*, если для любой смешанной стратегии X_i этого игрока

$$H_i(\sigma^0 \| X_i) \le H_i(\sigma^0).$$

Определение 2.

Ситуация σ^* в смешанных стратегиях называется *ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях*, если эта ситуация приемлема для всех игроков.

Определение 3.

Смешанная стратегия $X_i^0, X_i^0 \in \overline{X}_i$ игрока $i, i = 1, ..., k$, называется *равновесной*, если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Принципиально важное значение в теории игр имеет следующая теорема.

Теорема Нэша. Любая конечная бескоалиционная игра k лиц имеет хотя бы одну ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

§3.4. Свойства ситуаций равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях для биматричной игры

Дана биматричная ($n \times m$)- игра Г(A, B) с платёжными матрицами A и B.

Введём следующее определение.

Определение. Чистая стратегия *i*, *i* = 1, …, *n*; игрока 1 называется *существенной,* или *активной* стратегией, если существует равновесная смешанная стратегия $X^0 = \left\{\xi_1^0, ..., \xi_i^0, ..., \xi_n^0\right\}$ этого игрока, для которой $\xi_i^0 > 0$ (т.е. $i \in$ supp X^0).

Аналогично, чистая стратегия *j*, *j* = 1, …, *m*; игрока 2 называется существенной (активной) стратегией, если $i \in$ supp Y^0, где $Y^0 = \left\{\eta_1^0, ..., \eta_i^0, ..., \eta_m^0\right\}$ – равновесная смешанная стратегия.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\Gamma(A, B)$ – биматричная ($n \times m$)- игра с платёжными матрицами A и B. Пусть $\left(X^0, Y^0\right)$ – ситуация равновесная по Нэшу в смешанных стратегиях.

Тогда выполняются неравенства

$$\overline{H_1}(i,\, Y^0) \le \overline{H_1}(X^0,\, Y^0),$$
$$\overline{H_2}(X^0,\, j) \le \overline{H_2}(X^0,\, Y^0)$$

для всех чистых стратегий i, j, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$.

Теорема 2. Пусть $\Gamma(A, B)$ – биматричная ($n \times m$)- игра с платёжными матрицами A и B. Пусть $\left(X^0, Y^0\right)$ – ситуация, равновесная по Нэшу в смешанных стратегиях.

Тогда выполняются неравенства

$$\overline{H_1}(i, Y^0) = \overline{H_1}(X^0, Y^0),$$
$$\overline{H_2}(X^0, j) = \overline{H_2}(X^0, Y^0)$$

для всех существенных стратегий i, j игроков 1 и 2 соответственно (т.е. для всех $i \in \operatorname{supp} X^0$, $j \in \operatorname{supp} Y^0$).

§ 3.5. Вполне смешанные стратегии равновесия по Нэшу в биматричных играх

Рассмотрим класс биматричных игр, в котором знания спектра достаточно для нахождения решения игры.

Пусть $\Gamma(A, B)$ – биматричная ($n \times n$) -игра, а $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ – множества чистых стратегий игроков 1 и 2 соответственно.

Определение 1. Смешанная стратегия Х(У) игрока 1(2) называется *вполне смешанной*, если её спектр $\operatorname{supp} X \left(\operatorname{supp} Y\right)$ состоит из множества $\mathcal{X}_1(\mathcal{X}_2)$.

Определение 2. Ситуация (X,Y) называется *вполне смешанной*, если стратегии X и Y – вполне смешанные.

Теорема. Пусть $\Gamma(A, B)$ – биматричная ($n \times n$) -игра и матрицы A, B – невырожденные $\left(\det A \neq 0;\ \det B \neq 0\right)$. Если игра Г имеет вполне смешанную ситуацию (X^0, Y^0) равновесия по Нэшу, то она единственная и вычисляется по формулам

$$X^0 = v_2 u B^{-1}, \qquad (1)$$
$$Y^0 = v_1 A^{-1} u^T, \qquad (2)$$

где

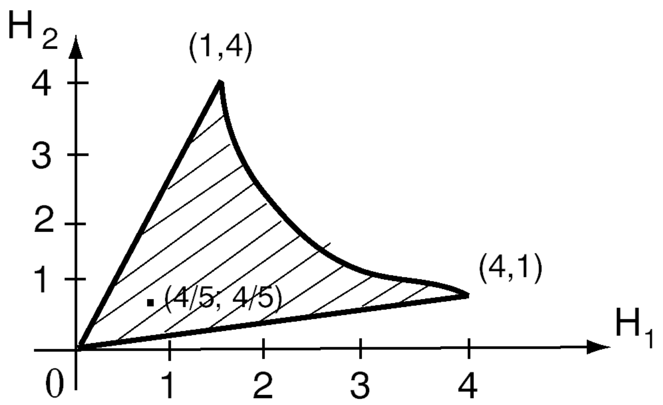
$$v_1 = \frac{1}{uA^{-1}u^T} = \overline{H}_1\left(X^0, Y^0\right),$$
$$v_2 = \frac{1}{uB^{-1}u^T} = \overline{H}_2\left(X^0, Y^0\right),$$

$u = (1, \dots, 1)$ – вектор-строка размерности n, u^T – вектор-столбец.

Обратно, если для векторов $X^0 = \left(\xi_1, \dots, \xi_n\right)$, $Y^0 = \left(\varsigma_1, \dots, \varsigma_n\right)$, определяемых равенствами (1), (2), справедливо $\xi_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n;\ \ \varsigma_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n;$ то пара (X^0, Y^0) образует ситуацию равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в игре Г(A, B) с вектором выигрышей $\left(v_1, \dots, v_2\right)$.

Формулы (1), (2) являются весьма примечательными: в равновесной по Нэшу ситуации (X^0, Y^0) выбор игрока 1 полностью определяется элементами платёжной матрицы B игрока 2 и не зависит от элементов его собственной платёжной матрицы A, а выбор игрока 2 в равновесной по Нэшу ситуации (X^0, Y^0) полностью определяется элементами платёжной матрицы A игрока 1 и не зависит от элементов его собственной платёжной матрицы B.

Иными словами, равновесная по Нэшу ситуация определяется не столько стремлением увеличить собственный выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока. И если, например, заменить в биматричной игре платёжную матрицу A игроку 1, а матрицу выплат B игроку 2 оставить прежней, то игрок 1 никак не изменит своего «равновесного» поведения (просто не обратит внимания на эту замену), в то время как игрок 2 изменит свою стратегию на новую, равновесную.



Пример. Рассмотрим игру «семейный спор» (см. пример 2 § 1.4 темы 1). Нас интересует смешанное расширение этой игры. Множество точек, соответствующих векторам выигрышей в смешанных стратегиях, можно изобразить графически (см. рис.)

В смешанной игре «семейный спор» имеется единственная вполне смешанная стратегия (X^0, Y^0) вычисляемая по формулам (1), (2):

$$X^0 = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right); \; Y^0 = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right); \; (v_1, v_2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

§3.6. Биматричные (2 x 2)-игры

В биматричной (2×2)-игре Г(A, B) платёжные матрицы игроков имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Смешанные стратегии игроков принимают вид

$$X = (p, 1 - p), \quad Y = (q, 1 - q).$$

Математические ожидания $\overline{H}_1(X, Y)$, $\overline{H}_2(X, Y)$ выигрышей вычисляются по формулам

$$\overline{H}_1(X,Y)=\overline{H}_1(p,q)=X\bullet A\bullet Y^T=(p,1-p)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix}=$$
$$=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p+(a_{21}-a_{22})q+a_{22}, \qquad (1)$$

$$\overline{H}_2(X,Y)=\overline{H}_2(p,q)=X\bullet B\bullet Y^T=(p,1-p)\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q\\ 1-q\end{pmatrix}=$$
$$=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})pq+(b_{12}-b_{22})p+(b_{21}-b_{22})q+b_{22}. \qquad (2)$$

Пусть $\left(X^0,Y^0\right)$ – ситуация равновесия по Нэшу в рассматриваемой биматричной (2×2)-игре Г(А, В), где

$$X^0=(p^*,1-p^*),\quad Y^0=(q^*,1-q^*).$$

Тогда, в силу теоремы 1 §3.4 этой темы справедливы неравенства

$$\begin{aligned}&\overline{H}_1\left(0,q^*\right)\le\overline{H}_1\left(p^*,q^*\right),\\ &\overline{H}_1\left(1,q^*\right)\le\overline{H}_1\left(p^*,q^*\right),\\ &\overline{H}_2\left(p^*,0\right)\le\overline{H}_2\left(p^*,q^*\right),\\ &\overline{H}_2\left(p^*,1\right)\le\overline{H}_2\left(p^*,q^*\right).\end{aligned} \qquad (3)$$

Иными словами, для того чтобы убедиться, что пара $\left(p^*,q^*\right)$ определяет равновесную по Нэшу ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенства

$$\overline{H}_1\left(p,q^*\right)\le\overline{H}_1\left(p^*,q^*\right)$$

только для двух чистых стратегий игрока 1 ($p = 0$ и $p = 1$) и неравенства

$$\overline{H}_2\left(p^*,q\right)\le\overline{H}_2\left(p^*,q^*\right)$$

только для двух чистых стратегий игрока 2 ($q = 0$ и $q = 1$).

Итак, приступим к поиску пары $\left(p^*,q^*\right)$, используя четыре неравенства (3). Обратимся к формуле (1). Полагая в ней сначала $p = 1$, а потом $p = 0$. получаем, что

$$\overline{H}_1(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q+a_{12}+(a_{21}-a_{22})$$
$$\overline{H}_1(0,q)=(a_{21}-a_{22})q+a_{22}.$$

Рассмотрим разности

$$\overline{H}_1(p,q)-\overline{H}_1(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq\ +(a_{12}-a_{22})p-(a_{11}-a_{12}-a_{21}-a_{22})q+$$
$$+a_{22}-a_{21},$$
$$\overline{H}_1(p\ ,q\ )-\overline{H}_1(0,q\ )=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p.$$

Обозначим $C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}$, $\alpha=a_{22}-a_{12}$. Тогда получим следующие выражения:

$$\overline{H}_1(p,q)-\overline{H}_1(1,q)=Cpq-\alpha p-Cq+\alpha=Cq(p-1)-\alpha(p-1)=$$
$$=(p-1)(Cq-\alpha),$$
$$\overline{H}_1(p,q)-\overline{H}_1(0,q)=Cpq-\alpha p=p(Cq-\alpha).$$

Если пара (p, q) определяет ситуацию равновесия по Нэшу, то вследствие соотношений (3)

$$\overline{H}_1(p,q)-\overline{H}_1(1,q)=(p-1)(Cp-\alpha)\ge 0,$$
$$\overline{H}_1(p,q)-\overline{H}_2(0,q)=p(Cq-\alpha)\ge 0.$$

Из формулы (2) для функции $\overline{H}_2(p,q)$ при $q = 1$ и $q = 0$ соответственно имеем:

$$\overline{H}_2(p,1)=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})p+(b_{12}-b_{12})q+b_{21},$$
$$\overline{H}_2(p,0)=(b_{12}-b_{22})p+b_{22}.$$

Введём обозначения

$$D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22},\ \beta=b_{22}-b_{21}.$$

Разности

$$\overline{H}_2(p,q)-\overline{H}_2(p,1) \text{ и } \overline{H}_2(p,q)-\overline{H}_2(p,0)$$

приводятся к виду

$$\overline{H}_2(p,q)-\overline{H}_2(p,1)=(q-1)(Dp-\beta),$$
$$\overline{H}_2(p,q)-\overline{H}_2(p,0)=q(Dp-\beta)$$

совершенно так же, как соответствующие разности для функции $\overline{H}_1$.

Если пара (p,q) определяет ситуацию равновесию по Нэшу, то эти разности неотрицательны:

$$\overline{H}_2(p,q)-\overline{H}_2(p,1)=(q-1)(Dp-\beta)\ge 0,$$
$$\overline{H}_2(p,q)-\overline{H}_2(p,0)=q(Dp-\beta)\ge 0.$$

Итак, подведём итоги.

Для того, чтобы в биматричной (2×2)-игре Γ(A, B) пара (p,q) определяла равновесную по Нэшу ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\begin{aligned}&(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0,\\ &p(Cq-\alpha)\ge 0,\\ &(q-1)(Dp-\beta)\ge 0,\\ &q(Dp-\beta)\ge 0,\\ &0\le p\le 1,\\ &0\le q\le 1,\end{aligned}\tag{4}$$

где $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha = a_{22} - a_{12}$, $D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta = b_{22} - b_{21}$.

§3.7. Поиск равновесных по Нэшу ситуаций в биматричных $(\mathbf{2 \times 2})$-играх

Пример 1. Игра «семейный спор». Применим условия (4) для игры «семейный спор». Напомним, что эта биматричная игра задаётся следующими платёжными матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Проведём необходимые вычисления:

$C = 4 - 0 - 0 + 1 = 5$, $\alpha = 1 - 0 = 1$,

$D = 1 - 0 - 0 + 4 = 5$, $\beta = 4 - 0 = 4$.

Отсюда

$$\begin{cases} (p-1)(5q-1) \geq 0, \\ p(5q-1) \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} (q-1)(5q-4) \geq 0, \\ q(5q-4) \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим сначала пару неравенств (1).

Возможны следующие три случая:

1) $p = 1$; 2) $p = 0$; 3) $0 < p < 1$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Пусть $p = 1$. Тогда получаем

$0 \geq 0$, $5q - 1 \geq 0$.

Отсюда

$$q \geq \frac{1}{5}.$$

2. Пусть $p = 0$. Тогда получаем

$0 \geq 0$, $-(5q-1) \leq 0$, $0 \geq 0$.

Откуда $5q - 1 \leq 0$, и, значит,

$$q \leq \frac{1}{5}.$$

3. Положим $0 < p < 1$. Имеем

$5q - 1 \leq 0$,

$5q - 1 \geq 0$.

Отсюда $q = \dfrac{1}{5}$.

В итоге имеем следующие результаты:

$1^0.\ p=1,\ q \ge \frac{1}{5}.$

$2^0.\ p=0,\ q \le \frac{1}{5}.$

$3^0.\ 0<p<1,\ q=\frac{1}{5}.$

Перенесём полученные результаты на чертёж.

Введём на плоскости прямоугольную систему координат (p,q). Отметим на ней единичный квадрат: $0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1.$

Нанесём на чертёж множество точек, которое задано условиями 1^0, 2^0, 3^0. Это множество (на рис. 1 его точки выделены жирной линией) состоит из трёх прямолинейных участков и представляет собой вертикальный «зигзаг».

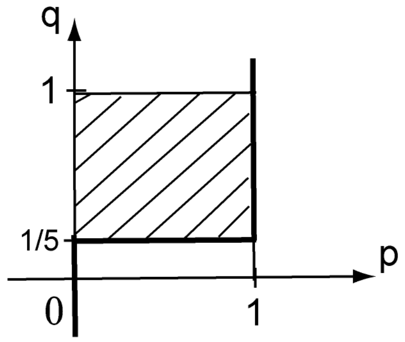


Рис. 1

Нас интересует только та его часть, которая попала в заштрихованный на рис. 1 единичный квадрат.

Теперь исследуем неравенства (2). Здесь имеем три случая:

1) $p=1$; 2) $p=0$; 3) $0<p<1$.

Получаем следующие результаты в этих случаях:

$1^*.\ q=1,\ p \ge \frac{4}{5}.$

$2^*.\ q=0,\ p \le \frac{4}{5}.$

$3^*.\ 0<q<1,\ p=\frac{4}{5}.$

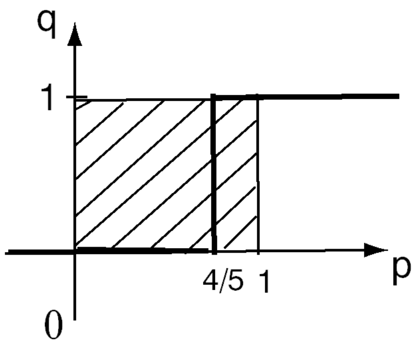


Рис. 2

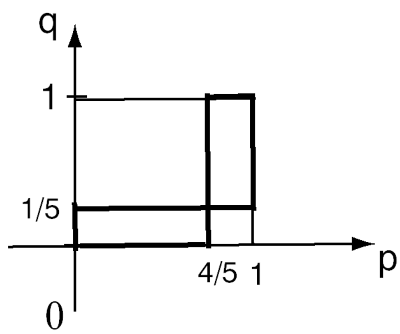


Рис. 3

Нанеся на чертёж множество точек, которое задано соотношениями 1^*, 2^*, 3^*, получим второй «зигзаг», но уже горизонтальный (см. рис. 2).

Объединим полученные «зигзаги» на рис. 3.

Мы видим, что данная игра имеет три ситуации, равновесные по Нэшу.

Две из них отвечают чистым стратегиям игроков:

a) $p=1, q=1, \overline{H}_1(1,1)=4, \overline{H}_2(1,1)=1;$

b) $p=0,\ q=0,\ \overline{H}_1(0,0)=1,\ \overline{H}_2(0,0)=4;$

c) $p=\frac{4}{5},\ q=\frac{1}{5}, X^0=\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right), Y^0=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right),\ \overline{H}_1\left(X^0,Y^0\right)=\frac{4}{5},\ \overline{H}_2\left(X^0,Y^0\right)=\frac{4}{5}.$

Третья равновесная по Нэшу ситуация $\left(X^0,Y^0\right)$ является вполне смешанной. В ней оба игрока получают одинаковые выигрыши, но меньше тех, которые дают две другие равновесные по Нэшу ситуации.

Пример 2.

Рассмотрим игру «дилемма заключённого».

Выигрыши игроков заданы следующими платёжными матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -10\\ 0 & -9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -10 & -9\end{pmatrix}.$$

Сформируем условия (4) из § 3.6 для этой игры. Здесь получим для C, D, α, β следующие значения:

C = –1 – (–10) – 0 + (–9) = 0,

α = –9 – (–10) = 1,

D = –1 – 0 – (–10) + (–9) = 0,

β = –9 – (–10) = 1.

Далее имеем две группы неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(-1)\ge 0,\\ p(-1)\ge 0.\end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases}(q-1)(-1)\ge 0,\\ q(-1)\ge 0.\end{cases} \qquad (4)$$

Выполняются также неравенства: $0 \le p \le 1$; $0 \le q \le 1$. Первая группа неравенств (3) приводит к результату

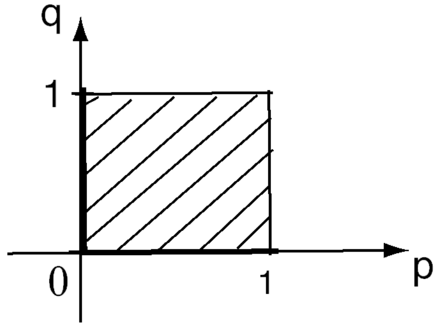


Рис. 4

3^*. $p=0,\ 0\le q\le 1.$

Вторая группа неравенств (4) даёт

4^*. $q=0,\ 0\le p\le 1.$

Изобразим множества точек (p,q), определённые соотношениями 3^*, 4^*, на чертеже.

Имеем единственную ситуацию (0, 0), равновесную по Нэшу в чистых стратегиях. Эта ситуация, в которой каждый из игроков выбирает вторую чистую стратегию – сознаться – и его потери составляют (–9). Отклонение от ситуации равновесия одного из игроков не даст ему никаких преимуществ. Однако если оба игрока выйдут из этой ситуации, то каждый из них может получить больший выигрыш.

§ 3.8. Задачи к теме

Найти вполне смешанные ситуации равновесия по Нэшу биматричной игры с платёжными матрицами A и B:

1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$.

ЧАСТЬ II. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

В предыдущей части мы предполагали, что обсуждение до игры и соглашения между игроками запрещены правилами игры. В кооперативном варианте игры правилами разрешён обмен информацией до и в процессе игры. Большинство исследователей полагает, что если такие экономические проблемы, как, например, споры между рабочими и предпринимателями, регулирование торговли между странами, можно рассматривать как игры, то только как кооперативные игры.

В части II рассматриваются различные виды сотрудничества между игроками.

ТЕМА 1. РАВНОВЕСИЕ В СОВМЕСТНЫХ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

§1.1. Определение совместной смешанной стратегии

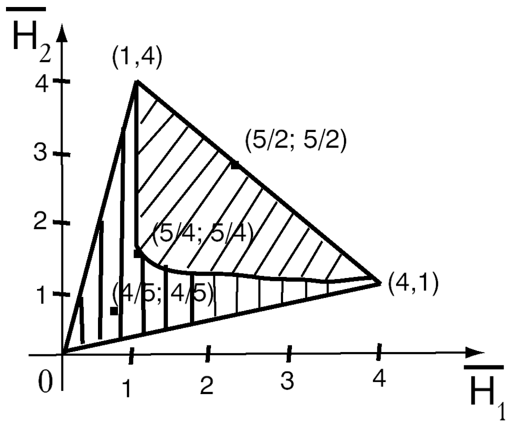


Рис. 1

Продолжим рассмотрение биматричных игр. Как уже отмечалось ранее, даже если ситуация равновесия по Нэшу является недоминируемой (т.е. оптимальной по Парето) возможны случаи, когда одна ситуация равновесия выгодна игроку 1, а другая – игроку 2 (см. пример игры «семейный спор», приведённый в теме 2, § 2.1, § 2.3 части 1).

Это затрудняет нахождение взаимоприемлемого решения в рамках некооперативной теории. Поэтому исследуем неантагонистический конфликт в формализации, разрешающей игрокам принимать совместные решения. Итак, возвращаемся к игре «семейный спор». Множество точек, соответствующих векторам выигрышей в смешанных стратегиях, можно изобразить графически (см. рис. §3.5 темы 3 части 1). На рис. 1 изображены две ситуации равновесия по Нэшу с векторами выигрышей (1, 4), (4,1) в чистых стратегиях и одна вполне смешанная равновесная ситуация с вектором выигрышей $\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$. Последняя ситуация менее предпочтительна для игроков, чем каждая из ситуаций равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Напомним, что равновесными по Нэшу здесь являются ситуации $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\left(X^0,Y^0\right)$, где $X^0=\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$, $Y^0=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$, кроме того, ситуации $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)$ также оптимальны по Парето.

Если игра повторяется многократно и игроки склонны к переговорам, то игрокам имеет смысл сделать совместный симметричный выбор: с вероятностью ½ выбирать ситуацию (α_1,β_1) или (α_2,β_2).. Тогда средний ожидаемый выигрыш игроков будет $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$. Этот средний выигрыш $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$. игроки могут получить, если перед каждой партией игры будут бросать монету, чтобы решить, что им выбрать: (1, 4) или (4, 1). Однако эта точка не лежит в множестве точек, соответствующих возможным ситуациям бескоалиционной игры (на рисунке это множество с вертикальной штриховкой), т.е. не может быть реализована, если игроки выбирают свои смешанные стратегии независимо.

Введём следующее определение.

Определение 1. Пусть рассматривается биматричная $(n \times m)$- игра Г(А, В). *Совместной смешанной стратегией* игроков будем называть вероятностное распределение на множестве всевозможных пар (i, j) (ситуаций в чистых стратегиях), необязательно порождённое независимыми случайными выборами чистых стратегий игроками 1 и 2.

Игроки до начала игры договариваются о предполагаемом распределении вероятностей на множестве ситуаций (i, j) в чистых стратегиях. После этого соответствующий случайный механизм выбирает конкретную ситуацию в чистых стратегиях для данной партии игры. Обозначим α совместную смешанную стратегию в биматричной $(n \times m)$-игре Г(А, В). Тогда ожидаемые выигрыши игроков 1 и 2 при использовании совместной смешанной стратегии соответственно равны

$$\overline{H}_1(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mu_{ij},$$

$$\overline{H}_2(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_{ij}\mu_{ij},$$

где $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ – матрицы выигрышей игроков, $\alpha=(\mu_{ij})$ – матрица вероятностей μ_{ij} размера $(n \times m)$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu_{ij}=1$. Геометрически множество точек, соответствующее множеству векторов выигрышей в совместных смешанных стратегиях, – это выпуклая оболочка множества точек возможных выигрышей в чистых стратегиях. Для игры «семейный спор» оно представляет собой множество, содержащееся в треугольнике с вершинами (0, 0), (1, 4), (4, 1) (см. рис. 1).

В общем случае, для биматричной $(n \times m)$- игры Г(А, В) выпуклую оболочку R можно описать следующим образом: нанесём на плоскости точки, соответствующие всем парам (a_{ij},b_{ij}), тогда R есть наименьшее выпуклое тело, содержащее эти точки. Это определение ясно, за исключением слов «выпуклое тело». Множество точек на плоскости называется выпуклым, если прямолинейный отрезок, соединяющий две точки множества, также лежит в этом множестве. Так, например, все внутренние точки круга составляют выпуклое множество, но не выпуклое тело. Выпуклое тело есть выпуклое множество, которое содержит также свою границу и ограничено в том смысле, что имеется круг с центром в начале координат, заключающей всё множество, если радиус круга выбран достаточно большим.

Определение 2. *Совместная смешанная стратегия* $\alpha*$ в биматричной ($n \times m$)-игре Г(A,B) называется *оптимальной по Парето*, если не существует такой совместной смешанной стратегии α, для которой имеют место неравенства $\bar{H}_i(\alpha) \geq \bar{H}_i(\alpha*)$ для $i = 1,2$ и $\bar{H}_{i_0}(\alpha) > \bar{H}_{i_0}(\alpha*)$ хотя бы для одного $i_0 \in \{1,2\}$.

Заметим, что совместная смешанная стратегия $a^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ в игре «семейный спор» является оптимальной по Парето и ей соответствует вектор выигрышей $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Таким образом, α^* может быть рекомендована в качестве кооперативного решения игры «семейный спор».

§1.2. Задача о переговорах. Решение фон Неймана-Моргенштерна

Пусть для некоторой биматричной ($n \times m$)- игры Г(A, B) выпуклая оболочка R множества точек возможных выигрышей в чистых стратегиях имеет вид, изображённый на рис. 1.

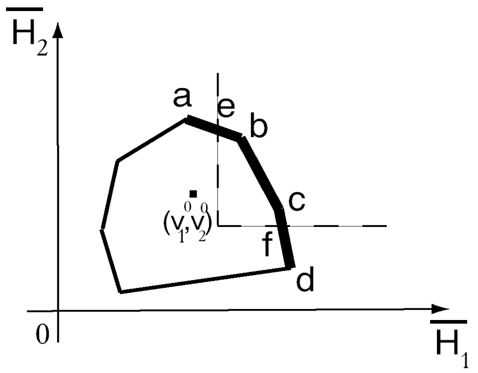


Рис. 1

Действуя совместно, игроки могут добиться в качестве вектора выигрышей любой точки множества R. Точка (u, v) множества R называется доминируемой другой точкой (u', v') множества R, если $u' \geq u$, $v' \geq v$) и хотя бы одно из этих неравенств строгое.

Очевидно, игрокам не нужно рассматривать никакие доминируемые точки. Следовательно, можно ожидать, что если игроки разумны, то после предварительных переговоров они ограничатся рассмотрением недоминируемых исходов, которые в данном случае соответствуют жирной линии abcd множества R. Это множество назовём *оптимальным множеством Парето*. Допущения об информации для кооперативной игры, лежащей в основе этой модели, означают, что множество R и оптимальное множество Парето известны игрокам. В данном анализе также предполагается, что не допускаются никакие «скрытые стратегии», или блеф.

Очевидно, игрок 1 предпочитает всем остальным точку d, а игрок 2 – точку a. Но эти желания игроков обычно нереальны. Например, рассматривая игру как некооперативную, игрок 1 может гарантировать себе выигрыш v_1^0, применяя максиминную стратегию, а игрок 2, применяя свою максиминную стратегию, обеспечит себе выигрыш v_2^0.

И неразумно предполагать, что кто-либо из них согласится при переговорах получить меньше, чем свой максиминный выигрыш. Эти приемлемые точки – точки оптимального множества Парето, дающие каждому игроку не менее того, что он может гарантировать себе сам, применяя свои максиминные стратегии, – образуют так называемое *переговорное множество игры*. Обозначим это множество Ω. На рис. 1. переговорное множество соответствует части жирной линии, обозначенной ebcf.

Фон Нейман и Моргенштерн в теории кооперативных игр двух лиц выделяли переговорное множество как «кооперативное решение» игры. Этим они подчёркивали, что игроки совместно отбрасывают все доминируемые векторы выигрышей и все недоминируемые векторы выигрышей, которые не дают каждому из них по крайней мере ту сумму, которую он мог бы наверняка получить и без сотрудничества. Фон Нейман и Моргенштерн утверждали, что конкретный выбор исхода из точек переговорного множества Ω зависит от неких психологических свойств, присущих игрокам и проявляющихся при совершении торга.

Конкретизируем эти рассуждения ещё раз, вернувшись к игре «семейный спор».

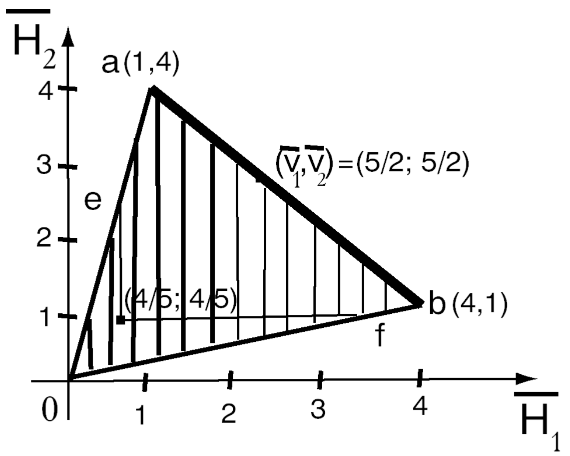


Рис. 2

Пример. Рассмотрим множество R, соответствующее векторам выигрышей в совместных смешанных стратегиях для игры «семейный спор» (область, заштрихованная на рисунке 2). Действуя совместно, игроки могут реализовать любой вектор выигрышей в смешанных стратегиях в множестве R.

Максиминные смешанные стратегии игроков в этой игре $X^0=\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$, $Y^0=\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)$ соответственно, а вектор выигрышей в максиминных стратегиях $\left(v^o{}_1,v^o{}_2\right)$ равен $\left(\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$. Переговорным множеством является отрезок, соединяющий точки *a* и *b*. Переговорное множество в данном случае совпадает с оптимальным множеством Парето.

§1.3. Арбитражная схема Нэша

Хотя фон Нейман и Моргештерн считали, что нельзя наложить дополнительное ограничение на переговорное множество Ω, другие авторы пытались выделить единственную точку из множества Ω. Здесь мы разберём схему, предложенную Нэшем.

Рассматриваются игры, участники которых стремятся к кооперации, причём кооперация разрешена правилами, а возможно даже сформирована принудительно. Однако игроки не надеются только на экономическую полезность соглашения и поддерживают стабильность коалиции с помощью третейского суда (арбитра), решения которого после обращения к нему обязательны для игроков.

Принципы справедливого дележа арбитра по Нэшу сформулированы аксиоматически.

Пусть для биматричной игры Г(А,В) заданы выпуклая оболочка R множества точек возможных выигрышей в чистых стратегиях и вектор максиминных выигрышей $\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$.

Предположим, что игроки в данной кооперативной игре ограничились рассмотрением множества R и ожесточённо торгуются о том, какую точку нужно выбрать. Обозначим такой торг $\left(R,\left(\nu_1^0,\nu_2^0\right)\right)$. На рисунке 1 изображено типичное множество R.

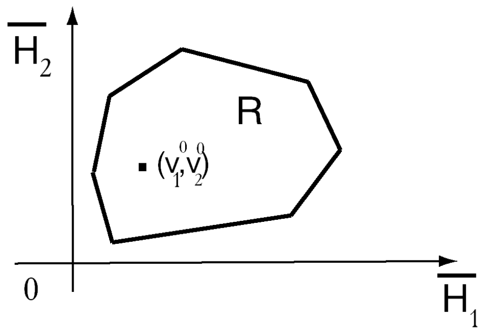


Рис. 1

Игрок 1 желает получить результат, изображаемый точкой, лежащей как можно правее в области R, а игрок 2 хочет достичь точки, лежащей как можно выше в этой области. В общем случае эти желания несовместимы. Игроки прибегают к помощи арбитра. Для каждой такой игры с торгом $\left(R,\left(\nu_1^0,\nu_2^0\right)\right)$ необходимо отобрать единственный вектор выигрышей $\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$, представляющий «справедливый» исход для обоих игроков. В переводе на язык математики это значит, что надо определить отображение F, которое по заданной комбинации $\left(R,\left(\nu_1^0,\nu_2^0\right)\right)$ даёт точку $\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)$ множества R:

$$F\left(R,\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)\right)=\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right). \qquad (1)$$

Оказывается, что при некоторых разумных предположениях задача (1) разрешима в силу справедливости следующей теоремы.

<u>Теорема</u>. Пусть R – выпуклое тело на плоскости, $\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$ − вектор максиминных выигрышей в биматричной игре Г(А,В). Множество R, вектор $\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)$ и отображение F удовлетворяют следующим условиям:

1) $\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)\geq\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$;*

2) $\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)\in$ R;

3) Если $(v_1,v_2)\in$ R и $(v_1,v_2)\geq\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)$ то $(v_1,v_2)=\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)$;

4) Если $(\bar{v}_1,\bar{v}_2)\in\tilde{R}\in R$ и $\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)=F\left(R,\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)\right)$, то $\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)=F\left(\tilde{R},\left(v_1^0,v_2^0\right)\right)$;

5) Пусть Т получается из R с помощью линейного преобразования

* Неравенство $\left(\bar{v}_1,\bar{v}_2\right)\geq\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$ означает, что $\bar{v}_1\geq v_1^0$; $\bar{v}_2\geq v_2^0$.

$v_1' = \alpha_1 v_1 + \beta_1,\ \ v_2' = \alpha_2 v_2 + \beta_2,\ \ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0.$

Тогда, если $F\left(R,\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)\right) = \left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$, то

$$F(T,(\alpha_1 v_1^0 + \beta_1, \alpha_2 v_2^0 + \beta_2)) = (\alpha_1 \bar{v}_1 + \beta_1, \alpha_2 \bar{v}_2 + \beta_2);$$

6) Если из $(v_1, v_2) \in R$ следует $(v_2, v_1) \in R$ для всех $(v_1, v_2) \in R$; $v^o{}_1 = v^o{}_2$ и $F\left(R,\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)\right) = \left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$, то $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$.

Тогда существует единственное отображение F такое, что

$$F\left(R,\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)\right) = \left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right).$$

Отображение F, которое по заданной игре с переговорами $\left(R,\left(v_1^0, v_2^0\right)\right)$ даёт вектор выигрышей $\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$ и удовлетворяет условиям 1) – 6), называется *арбитражной схемой Нэша*, условия 1)-6) – *аксиомами Нэша*, а вектор $\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$ – *арбитражным вектором выигрышей*. Таким образом, арбитражная схема – это реализуемый принцип оптимальности в игре с переговорами.

Обсудим условия теоремы на примере игры «семейный спор» (см. рис. 2 предыдущего §1.2.)

Условие 1) означает, что вектор выигрышей $\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$ по меньшей мере столь же хорош как вектор $\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$ максиминных выигрышей.

Условие 2) означает, что арбитражный вектор $\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$ выигрышей осуществим. Ограничение 3) показывает что $\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right)$ лежит в оптимальном множестве Парето. Условие 4) говорит о независимости отображения F от посторонних стратегий. Предположим, что две различные игры с торгом имеют одну и ту же точку $\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$ и все возможности сделок одной игры включены в другую игру. Если арбитражный вектор одной игры с большим множеством альтернатив является в действительности осуществимой сделкой в игре с меньшим множеством альтернатив, то он должен быть также арбитражным вектором второй игры. Другими словами если к игре с торгом добавить новые осуществимые сделки таким образом, что вектор $\left(v^o{}_1, v^o{}_2\right)$ не меняется, то либо арбитражный вектор также не меняется, либо он совпадает с одной из добавленных сделок. Ограничение 5) говорит о том, что если функции выигрыша отличаются лишь масштабом измерения и началом отсчёта, то также отличаются и результаты переговоров. Свойство 6) указывает на равноправность обоих игроков. В игре «семейный спор», являющейся симметричной для игроков, схема Нэша даёт арбитражный вектор $\left(\bar{v}_1, \bar{v}_2\right) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

§1.4. Задача к теме

Найти арбитражное решение биматричной игры (2×2)-игры с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 2. КЛАССИЧЕСКИЕ КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

§2.1. Игры в характеристической форме

Пусть $\{1, \ldots, k\}$ – некоторое конечное множество. Элементы множества J будем называть игроками. Любое подмножество $P \subset J$ называется коалицией. В частности, можно говорить о пустой коалиции, коалиции, состоящей из одного игрока, и т.д. Так как множество J состоит из k игроков, то эти игроки могут образовать 2^k различных коалиций.

Определение 1. *Характеристической функцией* игры k лиц будем называть функцию v, определённую на множестве всех подмножеств множества J и ставящую каждому подмножеству P (каждый коалиции в соответствие число v(P)), равное выигрышу, который могут получить игроки множества P, действуя, совместно. Если $P = \varnothing$ ($\varnothing$ – пустое множество), то потребуем $v(\varnothing) = 0$.

Определение 2. Характеристическая функция v игры k лиц называется *супераддитивной*, если для любых непересекающихся коалиций P и Q ($P \subset J$, $Q \subset J$, $P \cap Q = \varnothing$) выполняется неравенство

$$v(P) + v(Q) \le v(P \cup Q). \qquad (1)$$

Неравенство (1) означает, что коалиция $P \cup Q$ имеет не меньше возможностей, чем две непересекающиеся коалиции P и Q, действующие независимо.

Из супераддитивности v получаем, что для любых пересекающихся коалиций $P_1, \ldots P_m$

$$\sum_{i=1}^{m} v(P_i) \le v(J). \qquad (2)$$

Далее, пусть $P_1, \ldots P_l$ – произвольные непересекающиеся коалиции такие, что $P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_l = J$.

Из (2) следует, что

$$\sum_{i=1}^{l} v(P_i) \le v(J).$$

Если имеется супераддитивная характеристическая функция v игры k лиц, определённая на всех подмножествах множества $J\{1, \ldots, k\}$, то говорят что задана *классическая кооперативная игра* $\Gamma = \{J, v\}$ *k лиц*.

Пример. Имеется множество $A = \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}$ продавцов некоторого товара и множество $B = \{b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_m\}$ покупателей этого товара.

Продавец a_i, $i = 1, \ldots, n$, может продать x_i единиц товара, а покупатель b_j, $j = 1, \ldots, m$ собирается приобрести y_j единиц этого товара.

Введём множество $J = A \cup B$. Для каждого подмножества $P \subset J$ положим

$$v(P) = \min\left\{\sum_{i \in P} x_i,\ \sum_{j \in P} y_i\right\}.$$

Функция $v(p)$ является супераддитивной.

Тем самым определена кооперативная игра $\Gamma = \{J, v\}$.

Основная задача теории кооперативных игр k лиц заключается в построении принципов оптимального распределения максимального суммарного выигрыша $v(J)$ между игроками.

Для того, чтобы оценить полезность коалиции, нет необходимости знать все данные, определяющие конкретную игру; в частности, можно ограничиться упрощённой характеристикой игры, а именно её характеристической функцией.

Кооперативная игра Г(J,v) определяет *игру в характеристической форме*.

§2.2. Приведение бескоалиционной игры *k* лиц в нормальной форме к игре в характеристической форме

Рассмотрим конечную неантагонистическую бескоалиционную игру **Г** ***k*** лиц в нормальной форме

$$\Gamma = < J, \{X_i\}_{i\in J}, \{H_i(\bar{x})\}_{\substack{i\in J\\ \bar{x}\in\bar{X}}} > .$$

Напомним, что $J = \{1,\ldots,k\}$ – множество игроков; X_i – множество чистых стратегий игрока *i*, *i* = 1,…*k*; $H_i(\bar{x})$ – функция выигрыша игрока *i* в ситуации $\bar{x}, i = 1,...,k$. Здесь $\bar{x} = (x_1,...,x_k)$, $x_i \in X_i$; $\bar{X}$ – множество всех ситуаций $\bar{x}$.

Пусть игроки, составляющие некоторую коалицию $P \subset J$, объединяют свои усилия с целью увеличения своего суммарного выигрыша. Установим, какой наибольший выигрыш они могут себе гарантировать. Совместные действия игроков из коалиции P означают, что коалиция P, действуя от имени своих членов как один игрок (обозначим его I), предписывает своим участникам выбор элемента $\bar{x}_P$, $\bar{x}_P \in \bar{X}_P = \prod_{i\in P} X_i$ ($\prod_{i\in P} X_i$ – декартово произведение множеств X_i). Общность интересов игроков из коалиции P означает, что выигрыш этой коалиции есть сумма выигрышей участников из P, т.е.

$$H_P(\bar{x}) = \sum_{i\in P} H_i(\bar{x}),$$

где $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{x} = (x_1,...,x_k)$ – ситуация в чистых стратегиях. Посмотрим какой наибольший выигрыш игроки из коалиции P могут себе гарантировать. В худшем для игрока I случае оставшиеся игроки из J\P также могут объединиться в коллективного игрока II, имеющего в качестве своих чистых стратегий элементы $\bar{x}_{J\setminus P} \in \bar{X}_{J\setminus P} = \prod_{i\in J\setminus P} X_i$ и интерес, прямо противоположный игроку I (т.е. выигрыш игрока II в ситуации равен $(-H_P(\bar{x}))$. Так как $\bar{x}_P \in \bar{X}_P = \prod_{i\in P} X_i$, $\bar{x}_{J\setminus P} \in \bar{X}_{J\setminus P} = \prod_{i\in J\setminus P} X_i$, $\bar{x} \in \bar{X} = \prod_{i\in J} X_i$, то $\bar{x} = (\bar{x}_P, \bar{x}_{J\setminus P})$ и $H_P(\bar{x}) = H_P(\bar{x}_P, \bar{x}_{J\setminus P})$ в образовавшейся конечной антагонистической игре

$$\Gamma_P = \left\langle I, II, \bar{X}_P, \bar{X}_{J\setminus P}, H_P(\bar{x}_P, \bar{x}_{J\setminus P})_{\substack{\bar{x}_P\in\bar{X}_P\\ \bar{x}_{J\setminus P}\in\bar{X}_{J\setminus P}}} \right\rangle$$

гарантированным выигрышем игрока I является максиминный выигрыш

$$v(P)=\max_{\overline{x}_P\in\overline{X}_P}\ \min_{\overline{x}_{J\setminus P}\in\overline{X}_{J\setminus P}} H_P\left(\overline{x}_P,\overline{x}_{J\setminus P}\right)=\max_{\overline{x}_P\in\overline{X}_P}\ \min_{\overline{x}_{J\setminus P}\in\overline{X}_{J\setminus P}}\sum_{i\in P} H_i\left(\overline{x}_P,\overline{x}_{J\setminus P}\right). \quad (1)$$

Можно доказать, что v(P), построенная согласно (1), является супераддитивной, т.е. $v(P\cup Q) \geq v(P) + v(Q)$ для любых непересекающихся коалиций P и Q, $P \subset J$, $Q \subset J$.

Тем самым построена характеристическая функция игры k лиц.

Пример. Конкуренция на экономическом рынке.

Три предпринимателя (игроки 1, 2, 3) конкурирующие на рынке, могут продавать либо по высокой цене (+), либо по низкой цене (–), прибыль каждого из них определяется в единицах прибыли следующей таблицей.

Ситуации	Цены (чистые стратегии игроков)			Выигрыши игроков		
a	+	+	+	3	3	3
b	+	+	–	0	0	12
c	+	–	+	0	12	0
d	+	–	–	1	5	5
e	–	+	–	12	0	0
f	–	+	–	5	1	5
g	–	–	+	5	5	1
h	–	–	–	1	1	1

При отсутствии переговоров (некооперативная игра) каждый из игроков имеет гарантированный выигрыш $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, используя свои максиминные чистые стратегии – выбор низкой цены (–).

Перейдём к кооперативной игре трёх лиц.

Построим характеристическую функцию этой игры трёх лиц.

Коалиции из одного игрока дают следующие гарантированные выигрыши:

$$v\{i\} = v_i = 1, \quad i = 1,2,3.$$

Чистыми стратегиями коалиций из одного игрока являются максиминные чистые стратегии некооперативной игры – выбор низкой цены (–).

Коалиции из двух игроков имеют гарантированные выигрыши: $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = 5 + 1 = 6$, если игроки, входящие в коалицию, будут придерживаться различных стратегий.

Коалиция из трёх игроков имеет суммарный выигрыш $v(\{1, 2, 3\})$, равный 12, используя ситуации *b, c* или *e*. Здесь коалиция из трёх игроков выступает как единый игрок, стратегиями которого являются ситуации.

Так как условия данной кооперативной игры являются одинаковыми для всех игроков, то справедливым является делёж суммарного выигрыша $v(\{1, 2, 3\})$ на три равные части.

§ 2.3. Дележи

Дана кооперативная игра Г = (J, v). Здесь J = {1, 2, …, k} − множество игроков; v = v(P) − супераддитивная характеристическая функция, определённая на всех P, $P \subseteq J$.

Приступим к обсуждению условий, при которых игроки заинтересованы участвовать в коалиции.

Введём следующее определение.

Определение 1. Вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$, удовлетворяющий условиям

$$\alpha_i \geq v(\{i\}), \quad i \in J; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = v(J), \tag{2}$$

где $v(\{i\})$ – значение характеристической функции для одноэлементной коалиции $P = \{i\}$ называется *дележом*.

Итак, чтобы кооперативная игра состоялась, необходимо выполнение условия (1), которое называется *условием индивидуальной рациональности* дележа. Это условие означает что, участвуя в коалиции, каждый игрок получает по меньшей мере столько, сколько он мог бы получить, действуя самостоятельно и не заботясь о поддержке других игроков.

Должно также выполняться условие (2), так как в случае $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i < v(J)$ существует $\overline{a}' = (a_1', ..., a_k')$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i' = v(J)$, при котором каждый игрок i∈J получит больше, чем его доля a_i. Если же $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i > v(J)$, то игроки, объединившись в коалицию из всех игроков, делят между собой нереализуемый выигрыш, и поэтому вектор $\overline{a}$ неосуществим.

Обозначим

$$\Delta_i = \alpha_i - v(\{i\}), \quad i \in J. \tag{3}$$

Согласно условию индивидуальной рациональности $\Delta_i \geq 0$, $i \in J$.

На основании соотношений (2), (3) для того, чтобы вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ был дележом в кооперативной игре Г = (J, v) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$v(J) - \sum_{i \in J} v(\{i\}) = \sum_{i \in J} \Delta_i \geq 0.$$

Определение 2. Игра Г = (J, v) называется *существенной*, если

$$\sum_{i\in J} v\left(\{i\}\right) < v(J). \quad (4)$$

Определение 3. Игра Г = (J, v) называется *несущественной*, если

$$\sum_{i\in J} v\left(\{i\}\right) = v(J). \quad (5)$$

Несущественная игра имеет единственный делёж $\overline{\alpha} = \left(v(\{1\}), v(\{2\}), ..., v(\{k\})\right)$.

Существенная игра состоится, если выполняется условие (4), которое называется *условием групповой (коллективной) рациональности*.

В существенной игре различных дележей бесконечно много, причём любой делёж в этой игре имеет вид

$$\overline{\alpha} = \left(v(\{1\}) + \Delta_1, v(\{2\}) + \Delta_2, ..., v(\{k\}) + \Delta_k\right),$$

где $\Delta_i \geq 0; i = 1,...,k; \sum_{i\in J}\Delta_i = \nu(J) - \sum_{i\in J}\nu(\{i\}) > 0$.

Одним игроком предпочтительнее один делёж, а другим – другой. Поэтому договариваться о принципах дележа необходимо заранее (до начала игры).

В качестве дележа существенной кооперативной игры часто используют:

а) «тривиальный» делёж, исповедующий принцип «*всем поровну*»:
$\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_k$;

б) делёж, пропорциональный индивидуальной значимости игрока i:

$$\Delta_i = \frac{\nu(\{i\})}{\sum_{i\in J}\nu(\{i\})}\nu(J).$$

Будем анализировать дележи существенной кооперативной игры с помощью отношения доминирования.

Определение 4. Делёж $\overline{\alpha}$ *доминирует* делёж $\overline{\beta}$ *по коалиции P* (обозначается $\overline{\alpha} \succ_P \overline{\beta}$), если

$$\alpha_i > \beta_i,\ i\in P,\ \sum_{i\in P}\alpha_i \leq v\left(p\right).$$

Первое из условий в определении 4 означает, что делёж $\overline{\alpha}$ лучше дележа $\overline{\beta}$ для всех членов коалиции P, а второе отражает реализуемость дележа $\overline{\alpha}$ коалицией P (т.е. коалиция P на самом деле может предложить каждому из игроков $i \in$ P величину α_i).

Определение 5. Делёж $\overline{a}$ *доминирует* делёж $\overline{\beta}$, если существует коалиция P, для которой $\overline{a} \succ_{P} \overline{\beta}$ Доминирование дележа $\overline{\beta}$ дележом $\overline{a}$ обозначается $\overline{a} \succ \overline{\beta}$.

Доминирование невозможно по одноэлементной коалиции и по коалиции J, включающей всех игроков. Действительно, из $\overline{a} \succ_{P} \overline{\beta}$ следовало бы $\beta_i < a_i \le v(\{i\})$ (согласно определению 4), что противоречит соотношению (1). А из $\overline{a} \succ_{J} \overline{\beta}$ следовало бы, что $\alpha_i > \beta_i$ для всех $i \in$ J и поэтому

$\sum_{i\in J}\alpha_i > \sum_{i\in J}\beta_i = v(J)$, что противоречит условию (2).

§2.4. С-ядро

Перейдём к выработке принципа относительного распределения максимального суммарного выигрыша v(J).

Возможен такой подход. Пусть игроки кооперативной игры J = (J,v) пришли к такому соглашению о распределении выигрыша v(J) (дележу $\overline{\alpha}^*$), при котором ни один из дележей не доминирует $\overline{\alpha}^*$. Тогда такое распределение экономически устойчиво в том смысле, что ни одной из коалиций P, P $\subset$ J, невыгодно отделиться от других игроков и распределить между членами коалиции выигрыш v(P). Это рассуждение позволяет сделать вывод о целесообразности рассмотрения множества недоминируемых дележей.

Определение. Множество недоминируемых дележей кооперативной игры Г = (J, v) называется её С-ядром.

Справедлива следующая теорема, характеризующая С-ядро.

Теорема. Для того. чтобы делёж $\overline{\alpha}$ принадлежал С-ядру, необходимо и достаточно выполнение для всех P, P $\subset$ J, неравенств

$$v(P) \le \sum_{i\in P}\alpha_i. \qquad (1)$$

Из условия (1) видно, что если делёж $\overline{\alpha}$ принадлежит С-ядру, то ни одна коалиция P не может гарантировать себе выигрыш, превосходящий $\sum_{i\in P}\alpha_i$. Это делает нецелесообразным существование коалиций P, отличных от максимальной коалиции J.

С-ядро игры Г = (J,v) является множеством экономически устойчивых в смысле коалиционных угроз дележей максимального суммарного дохода v(J).

Пример 1. Игра «джаз-оркестр». Директор клуба обещает 100 у.е. певцу A, пианисту B и ударнику D за совместное выступление. Дуэт певца и пианиста он оценивает в 80 у.е., ударника и пианиста в 65 у.е. и одного пианиста – в 30 у.е. Другие дуэты и солисты не рассматриваются, поскольку присутствие рояля директор клуба считает обязательным. Дуэт певец-ударник зарабатывает 50 у.е., а певец в среднем – 20 у.е. за вечер. Ударник один ничего не может заработать.

Обозначим цифрами 1,2,3 игроков A,B, D соответственно. Мы имеем здесь кооперативную игру Г = (J, v), где J = {1, 2, 3}, v = {1, 2, 3} = 100; v = {1, 3} = 50; v = {1} = 20; v = {1, 2} = 80; v = {2, 3} = 65; v = {2} = 30; v = {3} = 0; v{∅}0. Какое распределение максимального общего дохода следует признать разумным ?

Решение. Вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в игре «джаз-оркестр» принадлежит С-ядру тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha_1 \ge 20, \ \alpha_2 \ge 30, \ \ \alpha_3 \ge 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 100, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \ge 80, \ \ \alpha_2 + \alpha_3 \ge 65, \\ \alpha_1 + \alpha_3 \ge 50. \end{cases}$$

Это множество является выпуклой оболочкой следующих трёх дележей: (35, 45, 20), (35, 50, 15), (30, 50. 20).

Таким образом, выигрыши всех игроков определяются с точностью до 5 у.е. Типичным представителем С-ядра является центр (среднеарифметическое крайних точек), а именно: $\overline{\alpha}^*$ = (33,3; 48,3; 18,3). Для дележа $\overline{\alpha}^*$ характерно, что все двухэлементные коалиции имеют одинаковый дополнительный доход: $a_i + a_j - v(\{i\}) = 1{,}6$. Делёж $\overline{\alpha}^*$ можно считать справедливым компромиссом внутри С-ядра.

Пример 2. Дана кооперативная игра Г = (J,v), где J = {1, 2, 3}, v{∅} = v{1} = = v{2} = v{3} = 0; v{1, 2} = v{1, 3} = 1/2; v{2, 3} = 2/3; v{1, 2, 3} = 1.

Для того, чтобы вектор $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ принадлежал С-ядру игры Г = (J, v), необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \ge \dfrac{1}{2}, \\ \alpha_1 + \alpha_3 \ge \dfrac{1}{2}, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \ge \dfrac{2}{3}, \\ x_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

В частности, дележи $\overline{\alpha}_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $\overline{a}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ принадлежат С-ядру. Отметим, что ни один из этих дележей не доминирует другой.

Замечание. Из теоремы этого параграфа следует, что С-ядро является замкнутым, выпуклым подмножеством множества всех дележей (в частности, С-ядро может быть пустым множеством).

§2.5. Н—М – решение

Исторически первым принципом оптимальности в классических кооперативных играх является Н—М –решение (решение по фон Нейману-Моргенштерну).

Поскольку часто С-ядро = ∅, необходимо другое решение. Кроме того, хотя элементы С-ядра и не доминируются никакими другими дележами, однако нельзя утверждать, что для любого заданного дележа $\overline{a}$ найдётся доминирующий его делёж, принадлежащий С-ядру.

В следующей формулировке принципа оптимальности учитывается последнее обстоятельство.

Определение. Пусть V – множество всех дележей кооперативной игры Г = (J,v).

Множество L, L ⊂ V, называется Н—М –решением, если:

1) дележи из L не доминируют друг друга;
2) любой делёж, принадлежащий V\L, доминируется дележом из L.

Как следует из определения Н—М–решение содержит С-ядро. В самом деле, пусть делёж $\overline{a}$ принадлежит С-ядру, тогда если бы он не принадлежал Н—М–решению L, то согласно свойству 2) нашёлся бы такой делёж $\overline{a}'$, что $\overline{a}' \succ \overline{a}$. Мы приходим к противоречию, так как С-ядро – это множество недоминируемых дележей.

Н—М –решение удовлетворяет:

- внешней устойчивости: любой делёж, не принадлежащий
Н—М–решению, доминируется каким-либо дележом из Н—М–решения;
- внутренней устойчивости: каждый из дележей, принадлежащих Н—М – решению, не доминирует друг друга.

Пример. Дана кооперативная игра Г = (J,v), где J = {1,2}, v(∅) = 0,
v = ({i}) = 0, i = 1,2,3; v({i,j}) = 1, i = 1,2,3; j = 1,2,3; $i \neq j$; v({1,2,3}) = 1.

В этой игре рассмотрим множество $\widetilde{L}$, состоящее из трёх дележей:

$$\widetilde{L} = \{\overline{a}_{12}, \overline{a}_{13}, \overline{a}_{23}\}, \text{ где } \overline{a}_{12} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \overline{a}_{13} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \overline{a}_{23} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Любой из этих трёх дележей не доминирует друг друга.

Множество $\widetilde{L}$ имеет следующее свойство: любой делёж, не принадлежащий $\widetilde{L}$, доминируется одним из дележей a_{ij}. Проверим это. Возьмём какой-нибудь делёж $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3) \notin \widetilde{L}$. Как для всякого дележа:
$a_i \geq 0; a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Следовательно, не более двух компонент вектора $\overline{a}$

могут быть не меньше $\frac{1}{2}$. Если их действительно две, то каждая из них равна $\frac{1}{2}$, в то время как третья равна 0. Но это означает, что $\bar{a}$ совпадает с $\bar{a}_{ij}$. Если же $\bar{a}$ – какой-нибудь иной делёж, то он имеет не более одной компоненты, не меньшей $\frac{1}{2}$. Значит, по крайней мере две компоненты, например, a_i и a_j, где $i \neq j$ меньше $\frac{1}{2}$. Но в этом случае $\bar{a}_{ij} \underset{ij}{\succ} \bar{a}$. Таким образом, множество $\tilde{L}$ дележей образует Н—М-решение. Но это не единственное Н—М-решение.

Пусть b – любое число из отрезка $[0,\frac{1}{2}]$. Можно установить, что множество $\tilde{L}_{3,b} = \{(a, 1-b-a, b) \mid 0 \le a \le 1-b\}$ также является Н—М-решением. В это множество входят дележи, при которых игрок 3 получит постоянную b, а игроки 1 и 2 делят остаток во всевозможных пропорциях.

Итак, кроме симметричного Н—М-решения, описываемого множеством $\tilde{L}$, рассматриваемая игра имеет ещё целое семейство решений, при которых игрок 3 получает фиксированную величину b, $b \in [0,\frac{1}{2}]$. Эти Н—М-решения называются *дискриминирующими*; говорят, что игрок 3 при этом *дискриминирован* или *исключён.*

Из соображений симметрии очевидно, что существует ещё два семейства $\tilde{L}_{1,b}$ и $\tilde{L}_{2,b}$, в которых дискриминируются игроки 1 и 2 соответственно.

Рассмотренный пример показывает, что у кооперативной игры может быть много Н—М-решений. Возникает вопрос, какое из них следует выбрать. Даже если Н—М-решение выбрано, остаётся непонятным, какой из него выбрать делёж.

§ 2.6. Задача к теме

Проверить, что множество $\tilde{L}_{3,b}$ в игре примера § 1.4 является Н—М-решением.

УКАЗАНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Часть I
Тема 2

Задача 1. а) Все ситуации (*i, i*), $i = 1,\dots,n$.
б) Ситуация (1,1).
в) Ситуации (2,1), (1,2).

Задача 2. Ситуация (2,1) является сильно равновесной. Ситуация (2,3) – равновесная по Нэшу в чистых стратегиях.

Задача 3. (3,1), (2,2), (3,2), (1,2), (1,3) – ситуации, оптимальные по Парето в чистых стратегиях. Ситуация (2,3) – равновесная по Нэшу в чистых стратегиях.

Тема 3

Задача 1.

$$p=\frac{3}{5},q=\frac{1}{3};\quad H_1\left(\frac{3}{5},\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3},\quad H_2\left(\frac{3}{5},\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{5}.$$

Задача 2.

$$p=1,q=1,\qquad H_1(1{,}1)=2,\qquad H_2(1{,}1)=1;$$

$$p=0,q=0,\qquad H_1(0{,}0)=1,\qquad H_2(0{,}0)=2;$$

$$p=\frac{2}{3},q=\frac{1}{3},\quad H_1=(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=\frac{2}{3},\quad H_2(\frac{2}{3},\frac{1}{3})=\frac{2}{3}.$$

Задача 3.

$$p=0,q=0,\qquad H_1(0{,}0)=-6,\qquad H_2(0{,}0)=-6.$$

Часть II
Тема 1

Указание. Рассмотреть множество R, являющееся выпуклой оболочкой множества точек возможных выигрышей в чистых стратегиях: (–1, –1), (1,2), (2,1). В качестве точки $\left(v_1^0,v_2^0\right)$ взять точку $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$ – вектор максиминных выигрышей игроков.

Тема 2

<u>Указание.</u> Рассмотреть произвольный делёж $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \notin \tilde{L}_{3,b}$, где, например, $\beta_3 = b + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Рассмотреть делёж $\overline{a} = \left(\beta_1 + \frac{\varepsilon}{2}, \beta_2 + \frac{\varepsilon}{2}, b\right) \in \tilde{L}_{3,b}$. Установить, что $\overline{a} \succ \overline{\beta}$.

Если же $\beta_3 < b$, то либо $\beta_1 \le \frac{1}{2}$, либо $\beta_2 \le \frac{1}{2}$ (ибо в противном случае их сумма была бы больше 1). Пусть, например, $\beta_1 \le \frac{1}{2}$. Взять делёж $\overline{a}^* = (1 - b, 0, b) \in \tilde{L}_{3,b}$. Показать, что $\overline{a}^* \succ \overline{\beta}$ в этом случае. Аналогично установить доминируемость дележа $\overline{\beta}$ дележом из $\tilde{L}_{3,b}$ при $\beta_2 \le \frac{1}{2}$; $\beta_3 < b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берж К.* Общая теория нескольких игр. – М.: Физматгиз, 1961.
2. *Бондарева О.Н.* О теоретико-игровых моделях в экономике. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
3. *Воробьёв Н.Н.* Теория игр для экономистов кибернетиков. – М.: Наука, 1985.
4. *Воробьёв Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984.
5. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.
6. *Данилов Н.Н.* Игровые модели принятия решений. – Кемерово: Изд-во КГУ, 1981.
7. *Данилов Н.Н., Зенкевич Н.А.* Неантагонистические игры двух лиц. – Кемерово: Изд-во КГУ, 1990.
8. *Дюбин Г.Н. Суздаль В.Г.* Введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, 1981.
9. *Иванов А.И.* Матричные игры. Теория и приложения. – М.: МГАПИ, 2003.
10. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964.
11. *Кукушкин Н.Н., Морозов В.В.* Теория неантагонистических игр. – М.: Изд-во МГУ, 1977.
12. *Мулен Э.* Теория игр. С примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.
13. *Льис Р., Райфа Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор. – М.: ИЛ, 1961.
14. *Фон Нейман Дж., Моргенштейн О.* Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
15. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Сёмина Е.А.* Теория игр. – М.: Высшая школа, 1998.
16. *Розенмюллер Н.* Кооперативные игры и рынки. – М.: Мир, 1974.
17. *Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г.* Математические методы и модели в управлении. – М.: Дело, 2000.

ОГЛАВЛЕНИЕ