

Министерство образования и науки

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Московский государственный университет
приборостроения и информатики (МИРЭА)



кафедра высшей математики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания для студентов дневной формы обучения.

Москва 2014

Составитель: к.т.н. *Антонова И.И.*
УДК 517.

Дифференциальные уравнения: методические указания для студентов дневной формы обучения./ Сост. *Антонова И.И.*

Изд. 2-е, испр. и доп. М.: МГУПИ (МИРЭА), 2014.

Излагаются основные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры решения различных типов задач, в том числе и решение некоторых типов систем дифференциальных уравнений. Рассмотрен образец выполнения типового расчета.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дневной форме обучения. Библиогр: 5 наим.

Рецензент: доц. *Якобовская И.М.*

Содержание

Дифференциальные уравнения первого порядка	3
Уравнения высших порядков	15
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.	21
Пример решения варианта типового расчёта	34
Литература.	47

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Прежде чем перейти к решению конкретных типов задач, напомним некоторые общие положения, касающиеся дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной, называется соотношение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y).$$

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = y(x)$, при подстановке которой в дифференциальное уравнение, оно превращается в тождество.

Задачей Коши для дифференциального уравнения первого порядка называется задача отыскания решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y),$$

удовлетворяющего условиям, $y = y_0$ при $x = x_0$.

Доказано, что если в некоторой области функция $f(x; y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, то в этой области задача Коши имеет решение и при том единственное.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка в некоторой области называется совокупность функций $y = \varphi(x; C)$ (C – произвольная постоянная), удовлетворяющая двум условиям:

1. При любом значении произвольной постоянной C функция $y = \varphi(x; C)$ является частным решением дифференциального уравнения;
2. Для любых начальных условий задачи Коши $y = y_0$ при $x = x_0$ найдётся такое значение произвольной постоянной C_0 такое что $y_0 = \varphi(x_0; C_0)$.

Если общее решение $y = \varphi(x; C)$ неявно определяется соотношением вида $\Phi(x; y; C) = 0$, то такое соотношение называется общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка.

Теперь перейдём к конкретным типам дифференциальных уравнений первого порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение, которое может быть записано в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Можно предложить следующую схему решения этого уравнения. Разделяем переменные, то есть уравнение переписываем в виде:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Интегрируя левую и правую части этого уравнения, получаем:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Полученное соотношение является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

Замечание. Если функция $g(y)$ равна нулю в точках $b_1, b_2, \dots, b_n$, то функции $y = b_1, y = b_2, \dots, y = b_n$ являются решениями исходного уравнения. При изложенном методе такие решения могут быть потеряны, поэтому их рекомендуется выписать отдельно.

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде $\psi(x, y) = C$).

$$x\sqrt{1+y^2} + y\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Для того, что бы убедиться, что данное уравнение действительно является уравнением с разделяющимися переменными, выразим $\frac{dy}{dx}$. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$$

Тогда $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $g(y) = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$. Заметим, что $g(y) \neq 0$. Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Приведём схему вычисления интеграла:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+1)}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2} \int (y^2+1)^{-\frac{1}{2}} d(y^2+1) = \frac{1}{2} \frac{(y^2+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{y^2+1}.$$

После вычисления интегралов имеем: $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C$.

Ответ: $\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = C$.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$(1 + e^x)y' - ye^x = 0.$$

Уравнение запишем в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1 + e^x} \times y.$$

Тогда $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $g(y) = y$. Заметим, что $g(y) = 0$ при $y = 0$.

Следовательно, функция $y = 0$ является решением данного дифференциального уравнения.

В случае $y \neq 0$ разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$$

Приведём схему вычисления интеграла

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} = \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1)$$

После вычисления интегралов имеем: $\ln|y| = \ln|e^x + 1| + \ln C$.

Потенцируя данное выражение, получаем $y = C(e^x + 1)$. Отметим, что решение $y = 0$ содержится в полученном выражении общего решения при $C = 0$.

Ответ: $y = C(e^x + 1)$.

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 1}{\cos y}.$$

Тогда $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(y) = \frac{1}{\cos y}$. Заметим, что $g(y) \neq 0$.

Разделяем переменные:

$$\cos y dy = (3x^2 + 1) dx.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем

$$\int \cos y dy = \int (3x^2 + 1) dx + C.$$

После вычисления интегралов имеем: $\sin y = x^3 + x + C$.

Ответ: $\sin y - x^3 - x = C$.

Задача 4. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dy.$$

Поясним, что такая запись подразумевает под dx дифференциал независимой переменной, под dy – дифференциал неизвестной функции ($dy = y' dx$).

Перенесём выражения, содержащие dy в левую часть уравнения, выражения, содержащие $-dx$ в правую часть. После некоторых простых преобразований, получаем

$$3y(x^2 + 1)dy = 2x(y^2 + 2)dx.$$

Разделяем переменные

$$3 \frac{y}{y^2 + 2} dy = 2 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем

$$3 \int \frac{y}{y^2 + 2} dy = 2 \int \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

Приведём схему вычисления интеграла

$$\int \frac{y}{y^2 + 2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2 + 2)}{y^2 + 2} = \frac{1}{2} \ln(y^2 + 2).$$

После вычисления интегралов имеем

$$3 \frac{1}{2} \ln(y^2 + 2) = 2 \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln C.$$

Потенцируя полученное выражение, имеем $(y^2 + 2)^3 = C(x^2 + 1)^2$.

Ответ: $(y^2 + 2)^3 = C(x^2 + 1)^2$.

2. Однородные уравнения.

Определение. Однородным уравнением называется дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть записано в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Можно предложить следующий метод его решения. Неизвестную функцию $y(x)$ будем искать в виде $y = xu$, где $u(x)$ – неизвестная функция. Тогда $y' = u + xu'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u).$$

Данное уравнение представим в виде

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} [f(u) - u].$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными для функции $u(x)$. Метод его решения рассмотрен ранее.

Задача 5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2.$$

Данное уравнение является однородным. Будем искать неизвестную функцию $y(x)$ в виде $y = xu$. Тогда $y' = u + xu'$. Подставляя u и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u + x \frac{du}{dx} = u^2 + 4u + 2.$$

Полученное уравнение преобразуем к виду

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (u^2 + 3u + 2).$$

Разделяем переменные

$$\frac{du}{u^2 + 3u + 2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем правую и левую части

$$\int \frac{du}{u^2 + 3u + 2} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|.$$

(В нашем случае произвольную постоянную удобнее обозначит не C , а $\ln|C|$, где $C \neq 0$. Вычисляя интегралы в правой и левой частях уравнения, получаем

$$\ln \left| \frac{u+1}{u+2} \right| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Потенцируя, имеем

$$\left| \frac{u+1}{u+2} \right| = |Cx|.$$

Избавляясь от знака модуля, получаем

$$\frac{u+1}{u+2} = Cx.$$

Поскольку $u = \frac{y}{x}$, то полученное соотношение может быть представлено в виде

$$\frac{y+x}{y+2x} = Cx.$$

Заметим, что в уравнении $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} (u^2 + 3u + 2)$, выражение

$u^2 + 3u + 2 = 0$ при $u_1 = -1$, $u_2 = -2$. Следовательно, функции $u = -1$ и $u = -2$ являются решениями дифференциального уравнения для неизвест-

ной функции $u(x)$, а значит, функции $y = -x$ и $y = -2x$ являются решениями исходного дифференциального уравнения.

Решение $y = -x$ содержится в решении $\frac{y+x}{y+2x} = Cx$, если положить $C = 0$.

Ответ: $\frac{y+x}{y+2x} = Cx$, $y = -2x$, где C – произвольная постоянная.

Задача 6. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Поскольку данное уравнение является однородным, то неизвестную функцию $y(x)$ будем искать в виде $y = xu$. Тогда $y' = u + xu'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u + x \frac{du}{dx} = e^u + u.$$

Полученное уравнение преобразуем к виду

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} e^u$$

Разделяем переменные

$$e^{-u} du = \frac{dx}{x}$$

Интегрируем правую и левую части

$$\int e^{-u} du = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Вычисляя интегралы в правой и левой частях уравнения, получаем

$$-e^{-u} = \ln|x| + C.$$

Поскольку $u = \frac{y}{x}$, то полученное соотношение может быть представлено в виде

$$-e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C.$$

Ответ: $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| + C = 0$, где C – произвольная постоянная.

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

Данное уравнение является однородным. Будем искать неизвестную функцию $y(x)$ в виде $y(x) = xu(x)$. Тогда $y' = u + xu'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$xu' + u = \frac{1 + 3u - u^2}{3 - 2u}.$$

Данное уравнение преобразуем к виду

$$xu' = \frac{1+u^2}{3-2u}.$$

Поскольку правая часть не равна нулю ни при каких значениях u , то, разделяя переменные, получаем

$$\frac{3-2u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем

$$\int \frac{3-2u}{1+u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Приведём схему вычисления интеграла

$$\begin{aligned} \int \frac{(3-2u)}{u^2+1} du &= \int \frac{3}{u^2+1} - \int \frac{2udu}{u^2+1} = 3\arctgu - \int \frac{d(u^2+1)}{u^2+1} = \\ &= 3\arctgu - \ln(u^2+1). \end{aligned}$$

После вычисления интегралов получаем

$$3\arctgu - \ln(u^2+1) = \ln|x| + C.$$

Поскольку $u = \frac{y}{x}$, то выражение записываем в виде

$$3\arctg \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = \ln|x| + C.$$

$$\text{Ответ: } 3\arctg \frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) - \ln|x| = C.$$

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, которое может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – известные функции.

Можно предложить следующий метод решения этого уравнения. Неизвестную функцию $y(x)$ будем искать в виде $y = uv$, где $u(x)$ неизвестная функция, а $v(x)$ – некоторая функция, выбранная специальным образом. (Способ выбора $v(x)$ будет описан позже). Производная y' равна: $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x).$$

Полученное уравнение преобразуем к виду

$$u[v' + P(x)v] + u'v = Q(x).$$

Подберём функцию $v(x)$ так, чтобы было выполнено: $v' + P(x)v = 0$.

(Это уравнение для определения функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными и нас интересует не его общее решение, а какое либо частное решение не тождественно равное нулю). Тогда для определения $u(x)$ имеем уравнение $u'v = Q(x)$. Из этого уравнения при известной функции $v(x)$ находим $u(x)$:

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C,$$

где C – произвольная постоянная.

$$\text{Тогда общее решение } y(x) \text{ имеет вид: } y = uv = \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right] v(x)$$

Задача 8. Найти решение задачи Коши:

$$y' + \frac{1}{2x} y = x^2, \quad y(1) = 1.$$

Вначале найдём общее решение этого уравнения. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u'v + uv' + \frac{1}{2x} uv = x^2; \quad u \left[v' + \frac{1}{2x} v \right] + u'v = x^2.$$

Выберем функцию $v(x)$ из условия $v' + \frac{1}{2x} v = 0$. Уравнение для функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение: $v' + \frac{1}{2x} v = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{2x}$; $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{2x}$; $\ln v = -\frac{1}{2} \ln x$; $v = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Найдём функцию $u(x)$: $u' \frac{1}{\sqrt{x}} = x^2$; $u' = x^2 \sqrt{x}$; $u = \int x^2 \sqrt{x} dx$; $u = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = \frac{2}{7} x^3 + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Произвольную постоянную C определим из условия $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{2}{7} + C; \quad C = \frac{5}{7}.$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{2}{7} x^3 + \frac{5}{7\sqrt{x}}.$$

Задача 9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} - 4x^3 y = 2xe^{x^4}.$$

Данное дифференциальное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u'v + uv' - 4x^3uv = 2xe^{x^4}; u[v' - 4x^3v] + u'v = 2xe^{x^4}.$$

Выберем функцию $v(x)$ из условия $\frac{dv}{dx} - 4x^3v = 0$. Уравнение для функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение:

$$\frac{dv}{dx} - 4x^3v = 0, \quad \frac{dv}{v} = 4x^3dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int 4x^3dx; \ln v = x^4; v = e^{x^4}.$$

Найдём функцию $u(x)$: $u'e^{x^4} = 2xe^{x^4}$; $u' = 2x$; $u = \int 2xdx$; $u = x^2 + C$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = (x^2 + C)e^{x^4}.$$

Ответ: $y = (x^2 + C)e^{x^4}$

Задача 10. Найти решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Данное дифференциальное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}uv = \frac{2x^2}{1+x^2}; u\left[\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}v\right] + \frac{du}{dx}v = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

Выберем функцию $v(x)$ из условия $\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}v = 0$. Уравнение для функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными.

Найдём его решение: $\frac{dv}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2x}{1+x^2}dx;$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2x}{1+x^2}dx; \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}; \ln v = -\ln(1+x^2), \quad v = \frac{1}{1+x^2}.$$

Найдём функцию $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}; \frac{du}{dx} = 2x^2; u = \int 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = \left(\frac{2}{3}x^3 + C\right) \frac{1}{1+x^2}.$$

Определим произвольную постоянную C .

Так как $y(0) = \frac{2}{3}$, то имеем $\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}0^3 + C\right) \frac{1}{1+0^2}, \quad C = \frac{2}{3}$

Ответ: $y = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 + 1}$

4. Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Можно предложить следующий метод решения этого уравнения. Неизвестную функцию $y(x)$ будем искать в виде $y = uv$, где $u(x)$ – неизвестная функция, а $v(x)$ – некоторая функция, выбранная специальным образом. (Способ выбора $v(x)$ будет описан позже). Производная y' равна: $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)u^n v^n.$$

Полученное уравнение преобразуем к виду

$$u[v' + P(x)v] + u'v = Q(x)u^n v^n.$$

Подберём функцию $v(x)$ из условия: $v' + P(x)v = 0$.

(Это уравнение для определения функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными и нас интересует не его общее решение, а какое либо частное решение не тождественно равное нулю).

Тогда для определения $u(x)$ имеем уравнение

$$u'v = Q(x)u^n v^n.$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными и способ его решения изложен ранее.

Задача 11. Найти решение задачи Коши:

$$2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$$

Вначале найдём общее решение этого уравнения. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда, подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:

$2u(xv' + v) + 2xvu' = xu^2v^2$. Функцию $v(x)$ определяем из условия:

$$x \frac{dv}{dx} + v = 0; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln v = -\ln x; \quad v = \frac{1}{x}.$$

$$2xu' = xu^2v^2; \quad \frac{du}{u^2} = \frac{dx}{2x}; \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{2x} + C; \quad -\frac{1}{u} = \frac{1}{2} \ln x + C; \quad u = -\frac{1}{\frac{1}{2} \ln x + C}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид $y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \ln x + C}$. Из условия

$$y(1) = 2 \text{ определяем произвольную постоянную } C: 2 = -\frac{1}{C}; \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $y = -\frac{2}{x(\ln x - 1)}.$

Задача 12. Найти решение задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 4e^{-2x}y^3, \quad y(0) = 1.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда, подставляя y и y' в исходное уравнение, получим:

$$u(v' + 3v) + vu' = 4e^{-2x}u^3v^3. \text{ Функцию } v(x) \text{ определяем из условия: } \frac{dv}{dx} + 3v = 0;$$

$$\frac{dv}{v} = -3dx; \int \frac{dv}{v} = -\int 3dx; \ln v = -3x; v = e^{-3x}. \text{ Определим } u(x): e^{-3x}u' = 4e^{-2x}u^3e^{-9x};$$

$$\frac{du}{u^3} = 4e^{-8x}dx; \int \frac{du}{u^3} = \int 4e^{-8x}dx + C; -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}e^{-8x} + C; u = \frac{1}{\sqrt{e^{-8x} - 2C}}. (\text{Знак плюс при извлечении квадратного корня выбран исходя из начальных условий}).$$

$$\text{Следовательно, общее решение имеет вид } y = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{e^{-8x} - 2C}}. \text{ Из условия}$$

$$y(0) = 1 \text{ определяем произвольную постоянную } C: 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2C}}; C = 0.$$

Ответ: $y = e^x.$

Задача 13. Найти решение задачи Коши:

$$y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), \quad y(0) = -1.$$

Вначале найдём общее решение этого уравнения. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + 4x^3uv = 4u^2v^2e^{4x}(1 - x^3);$$

$$u\left[\frac{dv}{dx} + 4x^3v\right] + \frac{du}{dx}v = 4u^2v^2e^{4x}(1 - x^3).$$

$$\text{Функцию } v(x) \text{ определяем из условия: } \frac{dv}{dx} + 4x^3v = 0, \frac{dv}{v} = -4x^3dx;$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int 4x^3dx; \ln v = -x^4; v = e^{-x^4}. \text{ Определим } u(x):$$

$$\frac{du}{dx}v = 4u^2v^2e^{4x}(1 - x^3); \frac{du}{dx} = 4u^2ve^{4x}(1 - x^3); \frac{du}{u^2} = 4e^{4x-x^4}(1 - x^3)dx.$$

Интегрируем правую и левую части полученного соотношения

$$\int \frac{du}{u^2} = \int 4e^{4x-x^4}(1 - x^3)dx.$$

Приведём схему вычисления полученных интегралов.

$$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}.$$

Для вычисления $\int 4e^{4x-x^4} (1-x^3) dx$ сделаем замену переменных

$$4x - x^4 = t, \quad dt = 4(1-x^3)dx, \quad dx = \frac{dt}{4(1-x^3)}.$$

Тогда получаем

$$\int 4e^{4x-x^4} (1-x^3) dx = \int 4e^t (1-x^3) \frac{dt}{4(1-x^3)} = \int e^t dt = e^t = e^{4x-x^4}$$

Подставляя полученные интегралы в исходное выражение, получаем

$$-\frac{1}{u} = e^{4x-x^4} + C, \quad u = -\frac{1}{e^{4x-x^4} + C}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид $y = uv = -\frac{e^{-x^4}}{e^{4x-x^4} + C}.$

Используя начальные условия задачи Коши, определим C .

$$\text{Так как } y(0) = -1, \text{ то } -1 = -\frac{1}{1+C}, C=0.$$

Тогда имеем $y = -e^{-4x}.$

Ответ: $y = -e^{-4x}.$

2. Уравнения высших порядков

Далее перейдём к уравнениям более высокого порядка.

Дифференциальным уравнением порядка n , разрешённым относительно старшей производной, называется дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots y^{(n-1)}).$$

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y = y(x)$, при подстановке которой в дифференциальное уравнение, оно превращается в тождество.

Задачей Коши для дифференциального уравнения порядка n называется задача отыскания решения дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющего условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad y''(x_0) = y''_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \\ x = x_0.$$

Доказано, что при определённых условиях задача Коши имеет решение и при том единственное.

Общим решением дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x; y; y'; y''; \dots y^{(n-1)})$ называется совокупность функций $y = \varphi(x; C_1; C_2; \dots C_n)$, где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные, удовлетворяющая условиям:

1. При любом наборе произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ функция $y = \varphi(x; C_1; C_2; \dots C_n)$ является частным решением дифференциального уравнения;

2. Для любых начальных условий задачи Коши $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ при $x = x_0$ существует такой набор значений произвольных постоянных $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$, что выполнены условия $\varphi(x_0; C_1^0; C_2^0; \dots C_n^0) = y_0$, $\varphi'(x_0; C_1^0; C_2^0; \dots C_n^0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0; C_1^0; C_2^0; \dots C_n^0) = y_0^{(n-1)}$

5. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Пусть дано уравнение порядка n вида

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots y^{(k)}, x) = 0,$$

то есть в данное уравнение явно не входят неизвестная функция и производные этой функции до порядка $k - 1$ включительно. Введём новую неизвестную функцию $z(x) = y^{(k)}(x)$. Производные функции $y(x)$ выразятся через производные функции $z(x)$ следующим образом: $y^{(k+1)} = z'$, ..., $y^{(n)} = z^{(n-k)}$. Подставляя в исходное уравнение, получаем

$F(z^{(n-k)}, z^{(n-k-1)}, \dots, z', z, x) = 0$. Полученное уравнение для функции $z(x)$ является уравнением более низкого порядка. Если функция $z(x)$ определена, то функция $y(x)$ определяется интегрированием соотношения $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Задача 14. При $x > 0$ найти общее решение дифференциального уравнения

$$2xy''' = y''.$$

Это уравнение явно не содержит y и y' . Обозначим $y'' = z$. Тогда: $y'' = z$, $y''' = z'$. Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$2xz' = z.$$

Уравнение для определения функции $z(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение: $2x \frac{dz}{dx} = z$; $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{2x}$;

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{2x}; \ln|z| = \frac{1}{2} \ln x + \ln|C|; \ln|z| = \ln|C|\sqrt{x}; |z| = |C|\sqrt{x}; z = C\sqrt{x}.$$

Так как $y'' = z$, то $y' = \int z dx + C_1 = \int C\sqrt{x} dx + C_1 = \frac{2}{3} Cx\sqrt{x} + C_1$. Тогда

$$y = \int \left(\frac{2}{3} Cx\sqrt{x} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{4}{15} Cx^2\sqrt{x} + C_1x + C_2.$$

Обозначим $C_3 = \frac{4}{15} C$.

Ответ: $y = C_3x^2\sqrt{x} + C_1x + C_2$, где C_3, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Задача 15. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3.$$

Данное уравнение не содержит явно неизвестную функцию y . Введём новую неизвестную функцию $z = y'$. Тогда $y'' = z'$ и уравнение преобразуется к виду

$$(1+x^2)z' + 2xz = x^3.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Будем искать z в виде $z = uv$. Тогда

$y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$(1+x^2) \left(\frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \right) + 2xuv = x^3;$$

$$u \left((1+x^2) \frac{dv}{dx} + 2xv \right) + (1+x^2) \frac{du}{dx} v = x^3.$$

Выберем функцию $v(x)$ из условия $(1+x^2)\frac{dv}{dx} + 2xv = 0$. Уравнение для функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными.

Найдём его решение: $(1+x^2)\frac{dv}{dx} + 2xv = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{2x}{1+x^2}dx$;

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2x}{1+x^2} dx; \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2}; \ln v = -\ln(1+x^2), v = \frac{1}{1+x^2}.$$

Найдём функцию $u(x)$:

$$(1+x^2)\frac{du}{dx} \frac{1}{1+x^2} = x^3; \frac{du}{dx} = x^3; u = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C_1.$$

Тогда

$$z = uv = \left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right) \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4} \frac{x^4}{(x^2+1)} + \frac{C_1}{x^2+1}.$$

Определим y .

$$\begin{aligned} y &= \int z dx = \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{(x^2+1)} dx + \int \frac{C_1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{(x^2+1)} \right) dx \right] + \int \frac{C_1}{x^2+1} dx = \\ &= \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \arctg x + C_1 \arctg x + C_2. \end{aligned}$$

Так как $C_1 + \frac{1}{4}$ является так же произвольной постоянной, то окончательный ответ может быть записан в виде

$$y = \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{4} x + C_1 \arctg x + C_2.$$

Ответ: $y = \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{4} x + C_1 \arctg x + C_2.$

Второй тип уравнений, допускающих понижение порядка, – это уравнения, которые явно не содержат независимую переменную x . (Мы будем рассматривать только уравнения второго порядка, однако предложенный метод применим и для уравнений более высокого порядка.) Пусть дано уравнение вида

$$F(y'', y', y) = 0.$$

Будем искать производную y' как функцию y в виде $y' = p(y)$, где $p(y)$ – неизвестная функция. Тогда

$$y'' = \frac{d}{dx} p(y) = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p'p.$$

Подставляя y'' и y' в исходное уравнение, получаем

$$F(p'p; p; y) = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением первого порядка для функции $p(y)$. Если нам удастся найти функцию $p(y)$, то для определения y имеем уравнение $y' = p(y)$, которое является уравнением с разделяющимися переменными.

Замечание. При изложенном методе могут быть потеряны решения $p(y) = 0$, то есть $y = \text{const}$. Поэтому такие решения рекомендуется выписывать отдельно.

Задача 16. Найти решение задачи Коши:

$$y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$$

Будем искать y' в виде $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Подставляя y'' и y' в исходное уравнение, получаем

$p'p = 128y^3$. Полученное для $p(y)$ уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение:

$$p \frac{dp}{dy} = 128y^3, \quad p dp = 128y^3 dy, \quad \int p dp = \int 128y^3 dy, \quad \frac{p^2}{2} = 32y^4 + C.$$

Определим произвольную постоянную C . Так как при $x = 0$ имеем $y(0) = 1$, а $y'(0) = 8$, то $p = 8$ при $y = 1$. Тогда $32 = 32 + C$, $C = 0$. Следовательно,

$$\frac{p^2}{2} = 32y^4 \text{ или } p = \pm 8y^2. \text{ Знак плюс при извлечении корня выбран потому, что}$$

$y'(0) = 8$ — положительное число. Неизвестную функцию $y(x)$ определяем из уравнения $y' = 8y^2$. Найдём его решение: $\frac{dy}{dx} = 8y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = 8dx$,

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 8dx, \quad -\frac{1}{y} = 8x + C, \quad y = -\frac{1}{8x + C}.$$

Так как $y(0) = 1$, то $1 = -\frac{1}{C}$, $C = -1$. Следовательно, $y = -\frac{1}{8x - 1}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{8x - 1}$.

Задача 17. Найти решение задачи Коши:

$$y'' = 6y^2, \quad y(2) = \frac{1}{4}, \quad y'(2) = -\frac{1}{4}.$$

Будем искать y' в виде $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Подставляя y'' и y' в исходное уравнение, получаем

$$p'p = 6y^2.$$

Полученное для $p(y)$ уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение:

$$p \frac{dp}{dy} = 6y^2, \quad p dp = 6y^2 dy, \quad \int p dp = \int 6y^2 dy, \quad \frac{p^2}{2} = 2y^3 + C. \text{ Определим}$$

произвольную постоянную C . Так как при $x = 2$ имеем $y(2) = \frac{1}{4}$, а

$$y'(2) = \frac{1}{4}, \text{ то } p = \frac{1}{4} \text{ при } y = \frac{1}{4}. \text{ Тогда } \frac{1}{32} = \frac{1}{32} + C, \quad C = 0. \text{ Следовательно}$$

но, $\frac{p^2}{2} = 2y^3$ **или**. Знак плюс при извлечении корня выберем потому, что

$y'(2) = \frac{1}{4}$ – положительное число. Неизвестную функцию $y(x)$ опреде-

ляем из уравнения $y' = 2\sqrt{y^3}$. Найдём его решение: $\frac{dy}{dx} = 2y^{\frac{3}{2}}$,

$$\frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} = 2dx, \quad \int \frac{dy}{y^{\frac{3}{2}}} = \int 2dx, \quad -\frac{2}{\sqrt{y}} = 2x + C, \quad y = \frac{4}{(2x + C)^2}. \text{ Так как}$$

$$y(2) = \frac{1}{4}, \text{ то } \frac{1}{4} = \frac{4}{(4 + C)^2}, \quad C = 0. \text{ Следовательно, } y = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{1}{x^2}.$$

Задача 18. Решить задачу Коши

$$y'' = 18 \sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(1) = 3.$$

Будем искать y' в виде $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Подставляя y'' и y' в исходное уравнение, получаем

$$p \frac{dp}{dy} = 18 \sin^3 y \cos y.$$

Полученное для $p(y)$ уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение: $p \frac{dp}{dy} = 18 \sin^3 y \cos y$,

$$p dp = 18 \sin^3 y \cos y dy, \quad \int p dp = \int 18 \sin^3 y \cos y dy,$$

$$\int p dp = \int 18 \sin^3 y d \sin y, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{9}{2} \sin^4 y + C. \text{ Определим произвольную}$$

постоянную C . Так как при $x=1$ имеем $y(1) = \frac{\pi}{2}$, а $y'(1) = 3$, то $p = 3$

при $y = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\frac{9}{2} = \frac{9}{2} + C$, $C=0$. Следовательно, $\frac{p^2}{2} = \frac{9\sin^4 y}{2}$ или

$p = \pm 3\sin^2 y$. Знак плюс при извлечении корня выберем плюс потому, что $y'(1) = 3$ – положительное число. Тогда $p = 3\sin^2 y$. Неизвестную

функцию $y(x)$ определяем из уравнения $\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 y$. Найдём его реше-

ние: $\frac{dy}{dx} = 3\sin^2 y$, $\frac{dy}{\sin^2 y} = 3dx$, $\int \frac{dy}{\sin^2 y} = 3 \int dx$, $-\operatorname{ctg} y = 3x + C$. Так

как $y(1) = \frac{\pi}{2}$, то $0 = 3 + C$, $C = -3$.

Следовательно, $y = \operatorname{arcctg} 3(1-x)$.

Ответ: $y = \operatorname{arcctg} 3(1-x)$.

3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

6. *Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.*

Однородным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами порядка n будем называть уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – действительные числа.

Характеристическим уравнением соответствующим данному дифференциальному уравнению называется алгебраическое уравнение вида

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения находится следующим методом. Пусть $\lambda = k_1$ является действительным корнем этого уравнения кратности s . Тогда ему соответствуют s линейно независимых решений дифференциального уравнения: $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = x e^{k_1 x}$, ..., $y_s = x^{s-1} e^{k_1 x}$.

Пусть комплексно сопряжённые числа $\alpha \pm \beta i$ являются корнями характеристического уравнения кратности s . Тогда им соответствуют $2s$ линейно независимых решений:

$$u_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, u_2 = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, u_s = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x;$$

$$v_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, v_2 = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, v_s = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Можно показать, что таким образом найдётся ровно n линейно независимых решений исходного дифференциального уравнения $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тогда общее решение линейного однородного дифференциального уравнения y_0 запишется в виде

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные.

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами порядка n будем называть уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $f(x)$, заданная функция. Если функция $y^*(x)$ является частным решением неоднородного уравнения, то его общее решение записывается в виде

$y = y^* + y_0$, где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

При отыскании частного решения неоднородного дифференциального уравнения полезно иметь в виду следующее: если $y_1^*(x)$ является частным решением неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$, а $y_2^*(x)$ является частным решением неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$, то

$y^* = y_1^* + y_2^*$ является частным решением неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x) + f_2(x)$.

Если известно общее решение однородного уравнения, то методом вариации произвольных постоянных можно отыскать частное решение неоднородного уравнения. Однако в общем случае применение этого метода вызывает технические трудности. Для правых частей некоторого специального типа частное решение может быть найдено более простым путём. Рассмотрим два таких типа правых частей.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n . Тогда частное решение $y^*(x)$ может быть найдено в виде $y^*(x) = x^s Q_n(x)e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n , s – кратность корня $\lambda = \alpha$ в характеристическом уравнении. (Если $\lambda = \alpha$ не является корнем характеристического уравнения, то полагаем $s = 0$.)

2. Пусть $f(x) = P_{m_1}(x)e^{\alpha x} \sin \beta x + Q_{m_2}(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, где $P_{m_1}(x), Q_{m_2}(x)$ – многочлены степени m_1, m_2 соответственно. Тогда частное решение может быть найдено в виде

$y^*(x) = x^s [T_n(x)e^{\alpha x} \sin \beta x + R_n(x)e^{\alpha x} \cos \beta x]$, где $T_n(x), R_n(x)$ – многочлены степени n , n – наибольшее из m_1 и m_2 , s – кратность корня $\alpha + \beta i$ в характеристическом уравнении.

Задача 18. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x.$$

Вначале найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x)$. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$. Найдём его корни: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$; $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$; $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

Исходное уравнение имеет правую часть первого типа: $\alpha = 1$, $P_n(x) = 1 - 2x$, $n = 1$. Число $\alpha = 1$ один раз встречается среди корней характеристического уравнения, значит кратность $s = 1$. Будем искать $y^*(x)$ в виде $y^*(x) = xQ_1(x)e^x$, где $Q_1(x)$ – многочлен первой степени. Тогда

$y^*(x) = x(Ax + B)e^x$. Коэффициенты A и B определим из условия, чтобы частное решение удовлетворяло исходному уравнению. Найдём $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}, \frac{d^3 y^*}{dx^3}$:

$$\frac{dy^*}{dx} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x;$$

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x;$$

$$\frac{d^3 y^*}{dx^3} = 6Ae^x + 3(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Подставляя $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}, \frac{d^3 y^*}{dx^3}$ в исходное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} & [6A + 3(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx)]e^x - 3[2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx)]e^x + \\ & + 2[(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx)]e^x = (1 - 2x)e^x. \end{aligned}$$

Сокращаем правую и левую части на e^x и приводим подобные в левой части: $-2Ax + B = -2x + 1$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получаем: $-2A = -2, B = 1$. Следовательно $A = 1, B = 1$. Тогда частное решение запишется в виде $y^*(x) = x(x + 1)e^x$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения равно:

$$y = y^* + y_0 = x(x + 1)e^x + C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

Задача 19. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 8y = 8x^2 - 12x + 10.$$

Вначале найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x)$. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$.

Найдём его корни: $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$; $(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$; $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = 4$.

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

Исходное уравнение имеет правую часть первого типа: $\alpha = 0$,

$P_n(x) = 8x^2 - 12x + 10$, $n = 2$. Число $\alpha = 0$ не встречается среди корней характеристического уравнения, значит кратность $s = 0$. Будем искать $y^*(x)$ в виде $y^*(x) = Q_2(x)$, где $Q_2(x)$ – многочлен второй степени. Тогда

$y^*(x) = Ax^2 + Bx + C$. Коэффициенты A, B и C определим из условия, чтобы

частное решение удовлетворяло исходному уравнению. Найдём $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}$:

$$\frac{dy^*}{dx} = 2Ax + B;$$

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = 2A.$$

Подставляя $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}$ в исходное уравнение, получаем:

$$[2A - 6(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C)] = 8x^2 - 12x + 10.$$

Приводим подобные в левой части уравнения:

$$8Ax^2 + (8B - 12A)x + (8C - 6B + 2A) = 8x^2 - 12x + 10.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получаем:

$$8A = 8;$$

$$8B - 12A = -12;$$

$$8C - 6B + 2A = 10.$$

Следовательно $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$. Тогда частное решение запишется в виде $y^*(x) = x^2 + 1$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения равно:

$$y = y^* + y_0 = x^2 + 1 + C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

Задача 20. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - y' = 2x + \cos x$$

Вначале найдём общее решение соответствующего однородного уравнения.

Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^3 - \lambda = 0$. Найдём его корни:

$$\lambda^3 - \lambda = 0; \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0; \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

Найдём частное решение. Правую часть представим как сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, где $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = \cos x$.

Рассмотрим уравнение

$$y''' - y' = 2x.$$

Функция $f_1(x) = 2x$ соответствует правой части первого типа: $\alpha = 0$,

$P_n(x) = 2x$, $n = 1$. Число $\alpha = 0$ один раз встречается среди корней характеристического уравнения, значит кратность $s = 1$. Будем искать $y^*(x)$ в виде

$$y_1^*(x) = xQ_1(x), \text{ где } Q_1(x) - \text{многочлен первой степени. Тогда}$$

$y_1^*(x) = x(Ax + B)$. Коэффициенты A и B определим из условия, чтобы частное решение удовлетворяло исходному уравнению. Найдём

$$\frac{dy_1^*}{dx}, \frac{d^2 y_1^*}{dx^2}, \frac{d^3 y_1^*}{dx^3};$$

$$\frac{dy_1^*}{dx} = (2Ax + B);$$

$$\frac{d^2 y_1^*}{dx^2} = 2A;$$

$$\frac{d^3 y_1^*}{dx^3} = 0.$$

Подставляя $\frac{dy_1^*}{dx}, \frac{d^2 y_1^*}{dx^2}, \frac{d^3 y_1^*}{dx^3}$ в исходное уравнение, получаем:

$$-2Ax - B = 2x$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получаем: $-2A = 2, B = 0$. Следовательно $A = -1, B = 0$. Тогда частное решение запишется в виде $y_1^*(x) = -x^2$.

Рассмотрим уравнение

$$y''' - y' = \cos x.$$

Функция $f_2(x) = \cos x$ является правой частью второго типа. Имеем $P_{m_1}(x) = 0, Q_{m_2}(x) = 1, m_1 = 0, m_2 = 0, \alpha = 0, \beta = 1$. Число $\lambda = i$ не является корнем характеристического уравнения, значит $s = 0$. Частное решение $y_2^*(x)$ ищем в виде $y_2^*(x) = T_0(x) \sin x + Q_0(x) \cos x$, где $T_0(x), Q_0(x)$ — многочлены нулевой степени, поскольку наибольшее из чисел m_1 и m_2 равно нулю. Тогда $y_2^*(x) = A \sin x + B \cos x$

Найдём $\frac{dy_2^*}{dx}, \frac{d^2 y_2^*}{dx^2}, \frac{d^3 y_2^*}{dx^3}$:

$$\frac{dy_2^*}{dx} = A \cos x - B \sin x;$$

$$\frac{d^2 y_2^*}{dx^2} = -A \sin x - B \cos x;$$

$$\frac{d^3 y_2^*}{dx^3} = -A \cos x + B \sin x.$$

Подставляя $\frac{dy_2^*}{dx}, \frac{d^2 y_2^*}{dx^2}, \frac{d^3 y_2^*}{dx^3}$ в уравнение, получаем:

$$-A \cos x + B \sin x - A \cos x + B \sin x = \cos x.$$

Приравнявая коэффициенты при синусах и косинусах в правой и левой частях уравнения, получаем: $-2A = 1, 2B = 0$. Следовательно $A = -\frac{1}{2}, B = 0$. То-

гда $y_2^*(x) = -\frac{1}{2} \sin x$. Тогда частное решение $y^*(x)$ исходного уравнения

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x) = -x^2 - \frac{1}{2} \sin x.$$

Общее решение уравнения равно

$$y = y^* + y_0 = -x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$$

7. Решение линейных неоднородных уравнений второго порядка методом вариации произвольных постоянных.

Пусть дано дифференциальное уравнение вида.

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

где $a_1(x), a_2(x), f(x)$ – известные функции. Пусть y_1 и y_2 являются линейно независимыми решениями однородного уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Тогда частное решение неоднородного уравнения может быть найдено в виде $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= f(x). \end{aligned}$$

Задача 21. Найти решение задачи Коши.

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Найдём решение однородного уравнения. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$. Найдём его корни: $\lambda = \pm i$. Однородное уравнение имеет два линейно независимых решения $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$. Частное решение y^* ищем в виде

$y^* = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1' \sin x + C_2' \cos x &= 0, \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Решая систему, получаем: $C_1' = \operatorname{ctg} x$, $C_2' = -1$.

Находим C_1 и C_2 : $C_1 = \int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x$, $C_2 = -\int dx = -x$.

Тогда $y^* = \sin x \ln \sin x - x \cos x$. Общее решение однородного уравнения равно: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = \sin x \ln \sin x - x \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Из условия $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ получаем $C_1 = 1$. Найдём производную общего решения: $y' = \cos x \ln \sin x + x \sin x + C_1 \cos x - C_2 \sin x$.

Из условия $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ получаем: $\frac{\pi}{2} - C_2 = \frac{\pi}{2}$, $C_2 = 0$.

Ответ: $y = \sin x \ln \sin x - x \cos x + \sin x$.

Задача 22. Найти решение задачи Коши.

$$y'' + 4y = 4 \operatorname{tg} 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$$

Найдём решение однородного уравнения. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4 = 0$. Найдём его корни: $\lambda = \pm 2i$. Однородное уравнение имеет два линейно независимых решения $y_1 = \sin 2x$ и

$y_2 = \cos 2x$. Частное решение y^* ищем в виде

$y^* = C_1(x)\sin 2x + C_2(x)\cos 2x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1' \sin 2x + C_2' \cos 2x &= 0, \\ C_1' 2\cos 2x - C_2' 2\sin 2x &= 4\operatorname{tg} 2x. \end{aligned}$$

Решая систему, получаем: $C_1' = 2\sin 2x$, $C_2' = -\frac{2\sin^2 2x}{\cos 2x}$.

Находим C_1 и C_2 : $C_1 = \int 2\sin 2x dx = -\cos 2x$, $C_2 = -\int \frac{2\sin^2 2x}{\cos 2x} dx$.

Для вычисления этого интеграла сделаем замену переменной $t = \sin 2x$. Тогда $dt = 2\cos 2x dx$, $dx = \frac{dt}{2\cos 2x}$. Подставляя в выражение для интеграла,

получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{2\sin^2 2x}{\cos 2x} dx &= \int \frac{2t^2}{\cos 2x} \frac{dt}{2\cos 2x} = \int \frac{t^2}{\cos^2 2x} dt = \\ &= \int \frac{t^2}{(1-\sin^2 2x)} dt = \int \frac{t^2}{(1-t^2)} dt = \int \left[-1 - \frac{1}{t^2-1} \right] dt = \\ &= -t - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = -\sin 2x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } y^* &= -\cos 2x \sin 2x + \left[\sin 2x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1} \right| \right] \cos 2x = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1} \right| \cos 2x \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения равно: $y_0 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1} \right| \cos 2x + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

Из условия $y(0) = 0$ получаем $C_2 = 0$. Найдём производную общего реше-

$$\text{ния: } y' = \frac{1}{2} \left[\frac{2\cos 2x}{\sin 2x-1} - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x+1} \right] \cos 2x - \ln \left| \frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1} \right| \sin 2x +$$

$$+2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x.$$

Из условия $y'(0) = -2$ получаем: $-2 = 2C_1$, $C_1 = -1$.

Ответ: $y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin 2x - 1}{\sin 2x + 1} \right| \cos 2x - \sin 2x.$

Задача 23. Найти решение задачи Коши.

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Найдём решение однородного уравнения. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda = 0$. Найдём его корни: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Однородное уравнение имеет два линейно независимых решения $y_1 = 1$ и $y_2 = e^x$.

Частное решение y^* ищем в виде

$y^* = C_1(x) + C_2(x)e^x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1' + C_2' e^x &= 0, \\ C_2' e^x &= \frac{1}{1+e^x}. \end{aligned}$$

Решая систему, получаем: $C_1' = -\frac{1}{1+e^x}$, $C_2' = \frac{1}{(1+e^x)e^x}$.

Находим C_1 и C_2 : $C_1 = -\int \frac{dx}{1+e^x}$, $C_2 = \int \frac{dx}{(1+e^x)e^x}$. Для вычисления

первого интеграла сделаем замену переменной $t = e^x$. Тогда $dt = e^x dx$,

$dx = \frac{dt}{e^x}$. Подставляя в выражение для интеграла, получаем

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right] dt = \ln t - \ln(1+t) = x - \ln(1+e^x)$$

При вычислении второго интеграла сделаем аналогичную замену переменных.

$$\int \frac{dx}{(1+e^x)e^x} = \int \frac{dt}{t^2(1+t)}.$$

Разлагая на простейшие дроби, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2(1+t)} &= \int \left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} \right] dt = -\frac{1}{t} - \ln t + \ln(t+1) = \\ &= -\frac{1}{e^x} - x + \ln(e^x + 1). \end{aligned}$$

Тогда $y^* = -x + \ln(e^x + 1) + \left[-\frac{1}{e^x} - x + \ln(e^x + 1) \right] e^x$

Общее решение однородного уравнения равно: $y_0 = C_1 + C_2 e^x$.

Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = -x + \ln(e^x + 1) + \left[-\frac{1}{e^x} - x + \ln(e^x + 1) \right] e^x + C_1 + C_2 e^x$$

Из условия $y(0) = 1$ получаем

$$C_1 + C_2 = 2 - 2 \ln 2.$$

Найдём производную общего решения:

$$y' = -1 + \frac{e^x}{e^x + 1} + \left[\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1} \right] e^x + \left[-\frac{1}{e^x} - x + \ln(e^x + 1) \right] e^x + C_2 e^x.$$

Из условия $y'(0) = 2$ получаем: $C_2 = 3 - \ln 2$. Следовательно

$$C_1 = -1 - \ln 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } y &= -x + \ln(e^x + 1) + \left[-\frac{1}{e^x} - x + \ln(e^x + 1) \right] e^x - \\ &- 1 - \ln 2 + (3 - \ln 2)e^x = -x + (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + (3 - \ln 2 - x)e^x - 2 - \ln 2 \end{aligned}$$

Ответ: $y = -x + (e^x + 1)\ln(e^x + 1) + (3 - \ln 2 - x)e^x - 2 - \ln 2$.

7. Решение систем линейных дифференциальных уравнений.

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; \dots y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x; y_1; y_2; \dots y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1; y_2; \dots y_n) \end{cases}$$

Задачей Коши для системы дифференциальных уравнений называется задача нахождения частного решения указанной системы, удовлетворяющего условиям

$y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, \dots, y_n = y_n^0$ при $x = x_0$.

Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений, является метод исключения, который позволяет систему n дифференциальных уравнений первого порядка свести к одному дифференциальному уравнению порядка n .

Задача 24. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y, \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям $x(0) = 1, y(0) = 1$.

Продифференцируем первое уравнение. Получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt}.$$

Подставим в полученное уравнение значение $\frac{dy}{dt}$, взятое из второго уравнения системы. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 3\frac{dx}{dt} - 2\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - 2(-x + 2y); \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 3\frac{dx}{dt} + 2x - 4y. \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы выразим y : $y = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right)$.

Тогда уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 2x - 4y$ можно переписать в виде

$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 2x - 2\left(3x - \frac{dx}{dt}\right)$. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка для определения неизвестной функции $x(t)$. Приводя подобные, запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0; (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{4t}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{произвольные постоянные.}$$

Найдём $y(t)$. Так как $y = \frac{1}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right)$, то, подставляя $x = C_1 e^t + C_2 e^{4t}$, получаем:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\left(3x - \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}(3C_1 e^t + 3C_2 e^{4t} - C_1 e^t - 4C_2 e^{4t}); \\ y &= C_1 e^t - \frac{1}{2}C_2 e^{4t}. \end{aligned}$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{4t};$$

$$y = C_1 e^t - \frac{1}{2} C_2 e^{4t}.$$

Где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Используя начальные условия, найдём произвольные постоянные.

Так как $x(0) = 1, y(0) = 1$, то для определения C_1, C_2 имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ C_1 - \frac{1}{2} C_2 = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = 1, C_2 = 0$.

Ответ: $x = e^t,$
 $y = e^t.$

Задача 25. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение. Получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4 \frac{dy}{dt}.$$

Подставим в полученное уравнение значение $\frac{dy}{dt}$, взятое из второго уравнения системы. Получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4(x - y);$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4x - 4y.$$

Из первого уравнения системы выразим y : $y = \frac{1}{4} \left(\frac{dx}{dt} - x \right).$

Тогда уравнение $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4x - 4y$ можно переписать в виде

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4x - \left(\frac{dx}{dt} - x\right)$. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка для определения неизвестной функции $x(t)$. Приводя подобные, запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$\lambda^2 + 5 = 0; \lambda = \pm\sqrt{5}i.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 \sin \sqrt{5}t + C_2 \cos \sqrt{5}t, \text{ где } C_1, C_2 - \text{произвольные постоянные.}$$

Найдём $y(t)$. Так как $y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$, то, подставляя $x = C_1 \sin \sqrt{5}t + C_2 \cos \sqrt{5}t$, получаем:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right) = \frac{1}{4}\left(C_1 \sqrt{5} \cos \sqrt{5}t - C_2 \sqrt{5} \sin \sqrt{5}t - C_1 \sin \sqrt{5}t - C_2 \cos \sqrt{5}t\right); \\ y &= C_1 \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} \cos \sqrt{5}t - \sin \sqrt{5}t\right) + C_2 \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} \sin \sqrt{5}t - \cos \sqrt{5}t\right). \end{aligned}$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \sin \sqrt{5}t + C_2 \cos \sqrt{5}t; \\ y &= C_1 \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} \cos \sqrt{5}t - \sin \sqrt{5}t\right) + C_2 \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} \sin \sqrt{5}t - \cos \sqrt{5}t\right). \end{aligned}$$

Где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Ответ: $x = C_1 \sin \sqrt{5}t + C_2 \cos \sqrt{5}t$;

$$y = C_1 \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} \cos \sqrt{5}t - \sin \sqrt{5}t\right) + C_2 \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5} \sin \sqrt{5}t - \cos \sqrt{5}t\right).$$

Задача 26. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение. Получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4 \frac{dy}{dt}.$$

Подставим в полученное уравнение значение $\frac{dy}{dt}$, взятое из второго уравнения системы. Получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 4(2x+3y);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 8x + 12y.$$

Из первого уравнения системы выразим y : $y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$.

Тогда уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 8x + 12y$ можно переписать в виде

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 8x + 3\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка для определения неизвестной функции $x(t)$. Приводя подобные, запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 5x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0; \quad (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0; \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{произвольные постоянные.}$$

Найдём $y(t)$. Так как $y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right)$, то, подставляя $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}$, получаем:

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{dx}{dt} - x\right) = \frac{1}{4}(-C_1 e^{-t} + C_2 5e^{5t} - C_1 e^{-t} - C_2 e^{5t}) = -\frac{1}{2}C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t};$$

$$y = -\frac{1}{2}C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}.$$

Где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Ответ: $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t};$

$$y = -\frac{1}{2}C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}.$$

4. Пример решения варианта типового расчёта

Задача 26. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{e^y}{x^2 - 1}.$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными

Тогда $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, $g(y) = e^y$. Заметим, что $g(y) \neq 0$. Разделяем переменные:

$$e^{-y} dy = \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

Интегрируя правую и левую части, получаем

$$\int e^{-y} dy = \int \frac{dx}{x^2 - 1}.$$

После вычисления интегралов имеем: $-e^{-y} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$.

Ответ: $-e^{-y} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = C$.

Задача 27. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y-x}{y+x} + \frac{y}{x}.$$

Данное уравнение является однородным. Будем искать неизвестную функцию $y(x)$ в виде $y = xu$. Тогда $y' = u + xu'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем:

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u-1}{u+1} + u.$$

Полученное уравнение преобразуем к виду

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{u-1}{u+1}.$$

Разделяем переменные

$$\frac{(u+1)}{(u-1)} du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем правую и левую части

$$\int \frac{(u+1)}{(u-1)} du = \int \frac{dx}{x} + \ln |C|.$$

(В нашем случае произвольную постоянную удобнее обозначит не C , а $\ln|C|$, где $C \neq 0$. Вычисляя интегралы в правой и левой частях уравнения, получаем

$$u + 2\ln|u - 1| = \ln|x| + \ln C.$$

Потенцируя, имеем

$$e^u (u - 1)^2 = |Cx|.$$

Избавляясь от знака модуля, получаем

$$e^u (u - 1)^2 = Cx.$$

Поскольку $u = \frac{y}{x}$, то полученное соотношение может быть представлено в виде

$$e^{\frac{y}{x}} \left(\frac{y}{x} - 1 \right)^2 = Cx.$$

Данное выражение преобразуем к виду

$$e^{\frac{y}{x}} (y - x)^2 = Cx^3$$

Заметим, что в уравнении $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \frac{u-1}{u+1}$, выражение $\frac{u-1}{u+1} = 0$ при $u_1 = 1$.

Следовательно, функция $u = 1$ является решением дифференциального уравнения для неизвестной функции $u(x)$, а значит, функция $y = x$ является решением исходного дифференциального уравнения.

Решение $y = x$ содержится в решении $e^{\frac{y}{x}} (y - x)^2 = Cx^3$, если положить $C = 0$.

Ответ: $e^{\frac{y}{x}} (y - x)^2 = Cx^3$, где C – произвольная постоянная.

Задача 28. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' + (\operatorname{tg} x) y = 2x \cos x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Вначале найдём общее решение этого уравнения. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя y и y' в исходное уравнение, получаем: $u'v + uv' + (\operatorname{tg} x)uv = 2x \cos x$; $(v' + v \operatorname{tg} x)u + u'v = 2x \cos x$.

Выберем функцию $v(x)$ из условия $v' + v \operatorname{tg} x = 0$. Уравнение для функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его

решение: $v' + v \operatorname{tg} x = 0$, $\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx$; $\int \frac{dv}{v} = -\int \operatorname{tg} x dx$; $\ln v = \ln \cos x$;
 $v = \cos x$.

Найдём функцию $u(x)$: $u' \cos x = 2x \cos x$; $u' = 2x$; $u = \int 2x dx$;
 $u = x^2 + C$.

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = uv = (x^2 + C) \cos x.$$

Произвольную постоянную C определим из условия $y(0) = 1$:
 $1 = C$.

Ответ: $y = (x^2 + 1) \cos x$.

Задача 29. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' + y = \frac{3}{2} e^{-2x} y^2, \text{ удовлетворяющее начальному условию } y(0) = 2.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Будем искать y в виде $y = uv$. Тогда, подставляя y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + u(v' + v) = \frac{3}{2} e^{-2x} u^2 v^2. \text{ Функцию } v(x) \text{ определяем из условия:}$$

$$\frac{dv}{dx} + v = 0; \frac{dv}{v} = -dx; \int \frac{dv}{v} = -\int dx; \ln v = -x; v = e^{-x}. \text{ Определим}$$

$$u(x): u' e^{-x} = \frac{3}{2} e^{-2x} u^2 e^{-2x}; \frac{du}{u^2} = \frac{3}{2} e^{-3x} dx; \int \frac{du}{u^2} = \frac{3}{2} \int e^{-3x} dx + C;$$

$$-\frac{1}{u} = -\frac{1}{2} e^{-3x} + C;$$

$$u = -\frac{1}{-\frac{1}{2} e^{-3x} + C}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид $y = -\frac{e^{-x}}{-\frac{1}{2} e^{-3x} + C}$. Из условия

$$y(0) = 2 \text{ определяем произвольную постоянную } C: 2 = -\frac{1}{-\frac{1}{2} + C}; C = 0.$$

Ответ: $y = 2e^{2x}$.

Задача 30. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x} = \frac{9}{4\sqrt{x}}.$$

Это уравнение явно не содержит y . Обозначим $y' = z$. Тогда: $y'' = z'$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{9}{4\sqrt{x}}.$$

Уравнение для определения функции $z(x)$ линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Будем искать z в виде $z = uv$. Тогда

$z' = u'v + uv'$. Подставляя z и z' в исходное уравнение, получаем:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{9}{4\sqrt{x}}; (v' + \frac{v}{x})u + u'v = \frac{9}{4\sqrt{x}}.$$

Выберем функцию $v(x)$ из условия $v' + \frac{v}{x} = 0$. Уравнение для функции

$v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его

решение: $v' + \frac{v}{x} = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$; $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$; $\ln v = -\ln x$; $v = \frac{1}{x}$.

Найдём функцию $u(x)$: $u' \frac{1}{x} = \frac{9}{4\sqrt{x}}$; $u' = \frac{9}{4}\sqrt{x}$; $u = \frac{9}{4} \int \sqrt{x} dx$;

$$u = \frac{3}{2} x\sqrt{x} + C_1.$$

Тогда для функции $z(x)$ имеем выражение

$$z = uv = \left(\frac{3}{2} x\sqrt{x} + C_1 \right) \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{C_1}{x}.$$

Так как $y' = z$, то

$$y = \int z dx + C_2 = \int \left(\frac{3}{2} \sqrt{x} + \frac{C_1}{x} \right) dx + C_2 = x\sqrt{x} + C_1 \ln x + C_2, \text{ где } C_1, C_2$$

– произвольные постоянные.

Задача 31. Найти решение дифференциального уравнения

$$4y^3 y'' = y^4 - 1,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Так как исходное уравнение явно не содержит независимую переменную x , будем искать y' в виде $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p'p$. Подставляя y'' и y' в исходное уравнение, получаем

$$4y^3 p \frac{dp}{dy} = y^4 - 1.$$

Полученное для $p(y)$ уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём его решение: $4p \frac{dp}{dy} = \frac{y^4 - 1}{y^3}$, $4p dp = \frac{y^4 - 1}{y^3} dy$,

$$4 \int p dp = \int \frac{y^4 - 1}{y^3} dy, \quad 2p^2 = \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y^2} + C.$$

Определим произвольную постоянную C . Так как при $x = 0$ имеем $y(0) = \sqrt{2}$, а $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, то

$$p = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ при } y = \sqrt{2}. \text{ Тогда } \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} + C, \quad C = -1. \text{ Следовательно,}$$

$$p^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} - 2 = \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 \text{ или } p = \left(y - \frac{1}{y}\right). \text{ Знак плюс при извлече-}$$

нии корня выбран потому, что $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ — положительное число.

Неизвестную функцию $y(x)$ определяем из уравнения $y' = \left(y - \frac{1}{y}\right)$.

$$\text{Найдём его решение: } \frac{dy}{dx} = \left(y - \frac{1}{y}\right), \quad \frac{y dy}{(y^2 - 1)} = dx, \quad \int \frac{y dy}{(y^2 - 1)} = \int dx,$$

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 - 1) = x + C. \text{ Так как } y(0) = \sqrt{2}, \text{ то } 0 = 0 + C, \quad C = 0. \text{ Следова-}$$

$$\text{тельно, } \ln(y^2 - 1) = 2x, \quad y = \sqrt{1 + e^{2x}}.$$

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{1 + e^{2x}}.$$

Задача 32. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Найдём решение однородного уравнения. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$. Найдём его корни:

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Однородное уравнение имеет два линейно независимых решения $y_1 = e^{-2x}$ и $y_2 = e^{-x}$. Частное решение y^* ищем в виде $y^* = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-x}$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} &= 0, \\ -2C_1' e^{-2x} - C_2' e^{-x} &= \frac{e^{-x}}{2 + e^x}. \end{aligned}$$

Решая систему, получаем: $C_1' = -\frac{e^x}{2 + e^x}, C_2' = \frac{1}{(2 + e^x)}$.

Находим C_1 и C_2 : $C_1 = -\int \frac{e^x dx}{2 + e^x}, C_2 = \int \frac{dx}{(2 + e^x)}$. Для вычисления первого интеграла сделаем замену переменной $t = e^x$. Тогда $dt = e^x dx$, $dx = \frac{dt}{e^x}$. Подставляя в выражение для интеграла, получаем

$$\int \frac{e^x dx}{2 + e^x} = \int \frac{dt}{(2 + t)} = \ln(t + 2) = \ln(e^x + 2)$$

При вычислении второго интеграла сделаем аналогичную замену переменных.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + e^x)} &= \int \frac{dt}{t(2 + t)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{(t + 2)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} \ln(t + 2) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln(e^x + 2). \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } y^* = -e^{-2x} \ln(e^x + 2) + \frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-x} \ln(e^x + 2)$$

Общее решение однородного уравнения равно: $y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.
Общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = -e^{-2x} \ln(e^x + 2) + \frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-x} \ln(e^x + 2) + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$$

Из условия $y(0) = 0$ получаем

$$C_1 + C_2 = \frac{3}{2} \ln 3.$$

Найдём производную общего решения:

$$y' = 2e^{-2x} \ln(e^x + 2) - e^{-2x} \frac{e^x}{e^x + 2} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} + \\ + \frac{1}{2}e^{-x} \ln(e^x + 2) - \frac{1}{2}e^{-x} \frac{e^x}{e^x + 2} - 2C_1e^{-2x} - C_2e^{-x}$$

Из условия $y'(0) = 0$ получаем: $2C_1 + C_2 = \frac{5}{2} \ln 3$.

Для определения C_1 и C_2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{3}{2} \ln 3, \\ 2C_1 + C_2 = \frac{5}{2} \ln 3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$C_1 = \ln 3, C_2 = \frac{1}{2} \ln 3. \quad y = -e^{-2x} \ln(e^x + 2) + \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x} \ln(e^x + 2) + \\ + e^{-2x} \ln 3 + \frac{1}{2}e^{-x} \ln 3 = e^{-2x} \ln\left(\frac{3}{e^x + 2}\right) + \frac{1}{2}e^{-x} \ln\left(\frac{3}{e^x + 2}\right) + \frac{1}{2}xe^{-x} = \\ = \frac{1}{2}xe^{-x} + \left(e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right)e^{-2x} \ln\left(\frac{3}{e^x + 2}\right).$$

Ответ: $y = \frac{1}{2}xe^{-x} + \left(e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right)e^{-2x} \ln\left(\frac{3}{e^x + 2}\right).$

Задача 33. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 6x + 8$.

Вначале найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x)$. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0. \text{ Найдём его корни: } \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0; \\ (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0; \lambda_1 = -2; \lambda_2 = -1.$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$$

Исходное уравнение имеет правую часть первого типа: $\alpha = 0$, $P_n(x) = 2x^2 + 6x + 8$, $n = 2$. Число $\alpha = 0$ не встречается среди корней характеристического уравнения, значит кратность $s = 0$. Будем искать $y^*(x)$ в виде $y^*(x) = Q_2(x)$, где $Q_2(x)$ – многочлен второй степени. Тогда $y^*(x) = Ax^2 + Bx + C$. Коэффициенты A , B и C определим из условия, чтобы частное решение удовлетворяло исходному уравнению. Найдём $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2} : \frac{dy^*}{dx} = 2Ax + B$;

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = 2A.$$

Подставляя $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}$ в исходное уравнение, получаем:

$$\left[2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) \right] = 2x^2 + 6x + 8.$$

Приводим подобные в левой части уравнения:

$$2Ax^2 + (2B + 6A)x + (2C + 3B + 2A) = 2x^2 + 6x + 8..$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получаем:

$$2A = 2;$$

$$2B + 6A = 6;$$

$$2C + 3B + 2A = 8.$$

Следовательно $A = 1, B = 0, C = 3$. Тогда частное решение запишется в виде $y^*(x) = x^2 + 3$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения равно:

$$y = y^* + y_0 = x^2 + 3 + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

$$\text{Ответ: } y = x^2 + 3 + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Задача 34. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 8y' + 12y = (5x - 6)e^x - 4e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Вначале найдём общее решение соответствующего однородного уравнения. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0. \text{ Найдём его корни: } \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0;$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0; \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6.$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}.$$

Найдём частное решение. Правую часть представим как сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, где $f_1(x) = (5x - 6)e^x$, $f_2(x) = -4e^{2x}$.

Рассмотрим уравнение

$$y'' - 8y' + 12y = (5x - 6)e^x.$$

Функция $f_1(x) = (5x - 6)e^x$ соответствует правой части первого типа: $\alpha = 1$, $P_n(x) = (5x - 6)$, $n = 1$. Число $\alpha = 1$ не встречается среди корней характеристического уравнения, значит кратность $s = 0$. Будем искать $y^*(x)$ в виде $y_1^*(x) = Q_1(x)e^x$, где $Q_1(x)$ – многочлен первой степени. Тогда $y_1^*(x) = (Ax + B)e^x$. Коэффициенты A и B определим из условия, чтобы частное решение удовлетворяло исходному уравнению. Найдём

$$\frac{dy_1^*}{dx}, \frac{d^2 y_1^*}{dx^2}:$$

$$\frac{dy_1^*}{dx} = (Ax + B)e^x + Ae^x;$$

$$\frac{d^2 y_1^*}{dx^2} = (Ax + B)e^x + 2Ae^x.$$

Подставляя $\frac{dy_1^*}{dx}, \frac{d^2 y_1^*}{dx^2}$ в исходное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} [(Ax + B) + 2A]e^x - 8[(Ax + B) + A]e^x + 12[Ax + B]e^x = \\ = (5x - 6)e^x \end{aligned}$$

Сокращаем правую и левую части на e^x и приводим подобные в левой части:

$$5Ax + (5B - 6A) = 5x - 6.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получаем: $5A = 5, 5B - 6A = -6$. Следовательно $A = 1$, $B = 0$. Тогда частное решение запишется в виде $y_1^*(x) = xe^x$.

Рассмотрим уравнение

$$y'' - 8y' + 12y = -4e^{2x}.$$

Функция $f_2(x) = -4e^{2x}$ соответствует правой части первого типа: $\alpha = 2$, $P_n(x) = -4$, $n = 0$. Число $\alpha = 2$ один раз встречается среди корней характеристического уравнения, значит кратность $s = 1$. Будем искать $y^*(x)$ в виде

$y_1^*(x) = xQ_0(x)e^{2x}$, где $Q_0(x)$ – многочлен первой степени. Тогда

$y_1^*(x) = Axe^{2x}$. Коэффициенты A и B определим из условия, чтобы частное

решение удовлетворяло исходному уравнению. Найдём $\frac{dy_1^*}{dx}, \frac{d^2 y_1^*}{dx^2}$:

$$\frac{dy_1^*}{dx} = 2Axe^{2x} + Ae^{2x};$$

$$\frac{d^2 y_1^*}{dx^2} = 4Axe^{2x} + 4Ae^{2x}.$$

Подставляя $\frac{dy_1^*}{dx}, \frac{d^2 y_1^*}{dx^2}$ в исходное уравнение, получаем:

$$[4Ax + 4A]e^{2x} - 8[2Ax + A]e^{2x} + 12[Ax]e^{2x} = -4e^{2x}$$

Сокращаем правую и левую части на e^{2x} и приводим подобные в левой части:

$$-4A = -4.$$

Следовательно $A = 1$. Тогда частное решение запишется в виде

$$y_2^*(x) = xe^{2x}.$$

Общее решение уравнения равно

$$y = xe^x + xe^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}.$$

Из условия $y(0) = 0$ получаем

$$C_1 + C_2 = 0.$$

Найдём производную общего решения:

$$y' = e^x + xe^x + e^{2x} + 2xe^{2x} + 2C_1 e^{2x} + 6C_2 e^{6x}$$

Из условия $y'(0) = 0$ получаем: $2C_1 + 6C_2 = -2$.

Для определения C_1 и C_2 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + 6C_2 = -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $y = xe^x + xe^{2x} + e^{2x} - 3e^{6x}$.

Ответ: $y = xe^x + xe^{2x} + e^{2x} - 3e^{6x}$.

Задача 35. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = 4\sin x.$$

Вначале найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x)$. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.

Найдём его корни: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$; $(\lambda - 1)^2 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Стоящая в правой части функция $f(x) = 4\sin x$ является правой частью второго типа. Имеем

$$P_{m_1}(x) = 4, Q_{m_2}(x) = 0, m_1 = 0, m_2 = 0, \alpha = 0, \beta = 1.$$

Число $\lambda = i$ не является корнем характеристического уравнения, значит $s = 0$. Частное решение $y^*(x)$ ищем в виде $y^*(x) = T_0(x)\sin x + Q_0(x)\cos x$, где $T_0(x), Q_0(x)$ – многочлены нулевой степени, поскольку наибольшее из чисел m_1 и m_2 равно нулю. Тогда $y^*(x) = A\sin x + B\cos x$

$$\text{Найдём } \frac{dy_2^*}{dx}, \frac{d^2 y_2^*}{dx^2}:$$

$$\frac{dy^*}{dx} = A\cos x - B\sin x;$$

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = -A\sin x - B\cos x.$$

Подставляя $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}$ в уравнение, получаем:

$$-A\sin x - B\cos x - 2(A\cos x - B\sin x) + (A\sin x + B\cos x) = 4\sin x$$

Приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах в правой и левой частях уравнения, получаем: $-2A = 0$, $2B = 4$. Следовательно $B = 2$. Тогда

$$y^*(x) = 2\cos x.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = 2\cos x + C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Задача 36. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' - y'' - y' + y = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$.

Вначале найдём общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x)$. Составляем характеристическое уравнение

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Найдём его корни: $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$;
 $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$; $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

Исходное уравнение имеет правую часть первого типа: $\alpha = 0$,
 $P_n(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$, $n = 3$. Число $\alpha = 0$ не встречается среди корней характеристического уравнения, значит кратность $s = 0$. Будем искать $y^*(x)$ в виде $y^*(x) = Q_3(x)$, где $Q_3(x)$ – многочлен третьей степени. Тогда $y^*(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Коэффициенты A , B и C определим из условия, чтобы частное решение удовлетворяло исходному уравнению. Найдём

$$\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}, \frac{d^3 y^*}{dx^3}:$$

$$\frac{dy^*}{dx} = 3Ax^2 + 2Bx + C;$$

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = 6Ax + 2B;$$

$$\frac{d^3 y^*}{dx^3} = 6A.$$

Подставляя $\frac{dy^*}{dx}, \frac{d^2 y^*}{dx^2}, \frac{d^3 y^*}{dx^3}$ в исходное уравнение, получаем:

$$6A - (6Ax + 2B) - (3Ax^2 + 2Bx + C) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^3 - 3x^2 - 6x + 6$$

Приводим подобные в левой части уравнения:

$$8Ax^2 + (8B - 12A)x + (8C - 6B + 2A) = 8x^2 - 12x + 10..$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях, получаем:

$$8A = 8;$$

$$8B - 12A = -12;$$

$$8C - 6B + 2A = 10.$$

Следовательно $A = 1, B = 0, C = 1$. Тогда частное решение запишется в виде $y^*(x) = x^2 + 1$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения равно:

$$y = y^* + y_0 = x^2 + 1 + C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

Задача 37. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 6y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad \text{удовлетворяющее начальным условиям } x(0) = 2, y(0) = 1.$$

Продифференцируем первое уравнение. Получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 6 \frac{dy}{dt}.$$

Подставим в полученное уравнение значение $\frac{dy}{dt}$, взятое из второго уравнения системы. Получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 6 \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 6(x - y);$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 6x + 6y.$$

Из первого уравнения системы выразим y : $y = \frac{1}{6} \left(4x - \frac{dx}{dt} \right)$.

Тогда уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 6x + 6y$ можно переписать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \frac{dx}{dt} - 6x + \left(4x - \frac{dx}{dt} \right).$$

Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением второго порядка для определения неизвестной функции $x(t)$. Приводя подобные, запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0; \quad (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \text{ где } C_1, C_2 - \text{произвольные постоянные.}$$

Найдём $y(t)$. Так как $y = \frac{1}{6} \left(4x - \frac{dx}{dt} \right)$, то, подставляя $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$, полу-

чаем:

$$y = \frac{1}{6} \left(4x - \frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{6} (4C_1 e^t + 4C_2 e^{2t} - C_1 e^t - 2C_2 e^{2t});$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{2t}.$$

Тогда общее решение системы имеет вид:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{2t};$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^t + \frac{1}{3} C_2 e^{2t}.$$

Где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Используя начальные условия, найдём произвольные постоянные.

Так как $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, то для определения C_1, C_2 имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = 2, C_2 = 0$.

Ответ: $x = 2e^t$,
 $y = e^t$.

Литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика том 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. Изд. 5-е, стереотип. М.: Дрофа, 2003 г.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, тт. 1-2. М.: Наука, 2000 г.
3. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Изд-во МГУ, 2004 г.
4. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. М.: АСТ Астрель, 2003 г.
5. Катасонов А.М. Дифференциальные уравнения. Программированное учебное пособие. М.: МГАПИ, 1997.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 2004 г.